力学系とエントロピー

青木統夫・白岩謙一　著

共立出版株式会社

まえがき

自然科学，社会科学および人文科学等に現れる系が時間と共に変化するありさまを研究することを考えよう．そのため，第一になすべきことは，現象の記述，すなわち，その系の状態の時間的変化をできるだけ正確に記述することである．第二は現象を支配する法則を発見し，その数学的モデル化を行うことである．これは必然的に次の第三を要請する．すなわち，第三として，その数学的モデルをもとにして，数学の理論を用いて現象を説明することである．以上によって，系の時間的変化のありさまが完全に解明されたといってよい．力学系理論は，主として，上の第三段階に寄与することが目的である．すなわち，できるだけ多くの重要な系を含むように一般的な数学的モデルを設定し，そのモデルに対する数学的研究を行うことである．

そこで我々は次のような場合を考えよう．系の状態の時間的変化が決定論的な一定の法則で与えられる場合，すなわち，系の現在の状態によって，過去および未来の状態が（ある一定の法則に従って）完全に決定されるような場合である．さらに，その状態変化が初期の状態と経過時間の長さだけに依存して定まる場合，すなわち，定常過程を考えよう．力学系では，時間的変化が連続的である場合と，ある一定時間の整数倍の形で時間変化を考える場合がある．前者を連続力学系，後者を離散力学系という．本書では，主としてコンパクト距離空間の上の離散力学系，すなわち，コンパクト距離空間からそれ自身への同相写像の生成する力学系を中心として考察する．

コンパクト距離空間の上の離散力学系は多くの重要な系を含み，理論も簡潔で分かり易く，初めて力学系を学ぶのに好適である．また，その理論は，多少の変更を行うことによって，連続力学系に対しても同様の理論が成立するようにできる．その点も考慮してこのような選択を行った．

本書の前半では，位相力学系の基礎理論を考察し，さらに，S. Smale の微分

可能力学系の理論，特に公理A力学系の満たす重要な性質である拡大性と擬軌道追跡性が位相的性質であることに着目し，位相力学系においても，拡大性と擬軌道追跡条件を仮定すれば，公理A力学系の場合と同様にスペクトル分解定理等の重要な結果が成立することを示す．

古典力学，特に Hamilton 系では，不変測度が存在し，測度論的考察が可能で，かつ重要となる．統計力学から生まれた数学的理論であるエルゴード理論は，測度論的力学系研究の重要な部分を占める．本書では，後半で測度論の基礎から始めて，エルゴード理論の基礎的部分と，測度論的エントロピーおよび位相的エントロピー等について解説する．「この後半の部分は，前半をすべて読まないでも，必要な定義を前半から参照することによって読むことができる．」本書の分担は，第1章を白岩が担当し，第2章以降については青木が担当し白岩が監修した．本書の成立に当たって，共立出版(株)の植山光陽，安原　勇の両氏にいろいろお世話になった．ここに謝意を表明する次第である．

1985年9月

青木統夫・白岩謙一

目　　次

第1章　力学系とその歴史

第2章　予 備 概 念

第3章 軌道の性質

第4章 力学的性質

第5章 位相的安定性と非遊走集合

第6章 位相的エントロピー

第7章　積分と確率測度

第8章　エルゴード性

第9章　Kolmogorov-Sinai エントロピー

第1章　力学系とその歴史

§01では力学的研究の歴史を概観する．このことによって，現代の力学系研究の到達点や問題点を明らかにすることができる．また，先人の努力の跡をたどることによって，我々の今後の研究の指針を定める資とすることもできよう．§02では力学系とは何かということから始まって，その問題点の設定を行うことにする．

§01　力学系小史

01·1　古代からギリシアまで

力学系の研究は，古代のエジプト，バビロニア，中国等における天体観測から始まった．これらの古代文明は，大河のほとりに発達した農業を基盤とするものである．

ナイル河の氾濫はエジプトの大地に生命を与え，その農業に決定的な影響を与えた．エジプト人は，現在，我々がシリウスと呼ぶ恒星ゾティスを観察し，これが初めて朝の空に現れる頃にナイル河が増水し，それから数週間後にナイル河の氾濫が始まり，新年が来ることを発見した．そして，ゾティスを新年とナイルの氾濫を知らせる星として崇拝した．

このような天体観測を用いて，エジプト暦が編まれたが，彼等は1年が約365日と1/4日であることを知っていた．また，多くの星や星座に名前をつけていた．

バビロニアにおける天文学は占星術と一体であった．バビロニア人は，潮の干満が月によって支配されることを知っていた．また，太陽の偉大な影響力も知っていたので，月と太陽を神としてあがめた．さらに，彼等は地上の出来事はすべて月や太陽の運行によって支配されると信じていた．したがって，天体を観測することによって，国や国王の運命，天候と収穫等，天下の形勢を占うことができると考えた．

彼等は5つの惑星——水星，金星，火星，木星，土星——に名前をつけ，他の

多くの星や星座にも名前をつけた．彼等は日時計と彼等の発明した水時計を用いて天体を観測し，かなり精密な結果を得た．特に，5惑星の運動を記録し，日食，月食の予言を行った．

中国でも，天体観測は農業や社会生活に必要な暦の作成に用いられたが，また，政治や軍事と結びついた占星術も行われた．古代中国では天という思想があった．すなわち，天は天地万物の主宰者であり，造物主であった．天は天文現象や自然現象を通じて，自分の意志を表明するものとされた．そして，天の子である天子，すなわち皇帝は，天文現象や自然現象を通じて天の意志をくみとり，政治を行うべきものとされた．このようにして，太陽と月，5惑星の軌道が計算され，日食や月食の予報が行われた．

天体の運動に関する古代の理論はギリシアに始まり，それは Ptolemaios (85?—165?)の著書アルマゲストに集大成されている．「アルマゲスト」は Euclid の原本と並んで科学史上大きい影響力をもった著書であって，17世紀まで，天文学の基本的文献であった．

Ptolemaios はアレクサンドリアで活躍したギリシアの科学者である．天文学，占星術の大家であり，有名な世界地図の製作者である．また，光学に関する著書もあり，万能な科学者であった．アルマゲストには Ptolemaios 自身の仕事も含まれているが，同じアレクサンドリアで紀元前2世紀頃に活躍した大天文学者 Hipparchos(190 B.C.—120 B.C.) の仕事の紹介も多く含まれている．この書は9世紀にキイタブ・アルマギスティ（最大の書）という書名でアラビア語に翻訳され，中世ヨーロッパの科学暗黒時代にイスラム世界で重用され，ギリシア科学のあとをついだ．中世の終わり12世紀に入り，アラビア語およびギリシア語原典からラテン語に訳され，ヨーロッパの科学的水準の復興に役立った．

アルマゲストにおける天体の運動の理論は，主として，地球を中心とする円運動を基本とし，それに周転円および離心円を組み合わせるという天動説であった．この理論は，現代では概周期関数の理論と結びついて，エルゴード理論や群の表現論の分野に生かされている．

01·2 中世からルネッサンスまで

Ptolemaios 以後大きい発展のないままルネッサンス期に入り，Copernicus

(1473—1543) の地動説が現れた．ギリシア時代にも太陽を中心とする Aristarchos (310 B.C.-230 B.C.) の説をヒントにして，教会と Aristoteles の権威に抗して地動説をとなえた Copernicus の科学史および思想史上の功績はまったく偉大で，あまりにも有名である．

Copernicus はポーランドに生まれ，イタリアで学び，帰国後はフラウエンブルクの聖堂参事会員として，行政・政治の両面に敏腕を奮うと共に，天文学者および医師としても知られた．彼は彼の主著「天体の回転について」において，太陽を宇宙の中心におき，地球は球形で，太陽のまわりを回転するものとした．そして，彼の体系は Ptolemaios のそれに比べて，天文学者にとって，より理解しやすいものであると述べた．彼の体系は革命的なものであったが，古代以来の円運動を基本として採用したので，実際の観測結果とよく一致するとは言い難かった．

これを克服したのがドイツの天文学者 Kepler (1571-1630) である．彼は初めグラーツの神学校で数学を教え，生計の足しに占星術を行っていた．その頃，デンマークの天文学者 Tycho-Brahe (1546—1601) はルドルフ二世のために，天文学者・占星術師として，プラハで天体観測を行っていた．Kepler はその助手を志願してプラハに赴き，火星の軌道の計算を行った．

Tycho-Brahe は地動説を信じなかったが，優秀な観測者で，その観測結果は精密なものであった．Tycho-Brahe の死後，Kepler は貧しい生活の中にもかかわらず，研究を続け，Copernicus の地動説と Tycho-Brahe の観測結果をもとに，火星の軌道が太陽を1つの焦点とする楕円であることを発見した．さらに発展して，惑星の運動に関する Kepler の3法則を発見した．

同じ頃，Galileo Galilei (1564—1642)も Copernicus の地動説を信じていた．彼はピサに生まれ，ピサの大学の数学・天文学教授となり，パドヴァの大学の数学教授を終て，フイレンツェの宮廷のお抱え数学者となった．彼は実験を基礎におき，観念的なAristoteles の運動論を打破した．ピサの斜塔から重さの異なる2つの球を落し，どちらも同時に地上に落下することを示して，Aristoteles の誤りを正したことは有名である．

さらに，彼は物体の自由落下は等加速度運動であることを実験によって示し，慣性法則を発見した．また自作の望遠鏡を用いて天体を観測し，Copernicus の地

動説を不動のものとした．しかしながら，この地動説によって，宗教裁判にかけられたことはあまりにも有名である．

01·3 Newton と解析力学

Newton (1642—1727) は，その主著「プリンキピア」(自然哲学の数学的諸原理) において，運動の3法則を確立し，Newton 力学を構築した．その第1法則は Galileo の発見した慣性法則であり，第2法則は Newton が初めて示した運動法則で，運動方程式を与えるものである．また，第3法則は作用反作用の法則である．Newton は Euclid の原本を手本に，これら3法則と幾何学的論証を用いて，彼の力学を構成した．当時，Kepler の第3法則から，天体間に働く力は距離の2乗に反比例することが推測されていたが，彼はこれを万有引力の法則として確立し，これを用いて天体の運動に関する Kepler の3法則を証明することに成功した．

Newton はこれより前に微積分法を発見していた．微積分法はプリンキピアの中に表面上は表れてない．しかしながら，Newton が彼の力学を構築するに際して，微積分法が本質的な役割を果たしたことは間違いない．

Newton 力学を微積分を用いて研究することは，スイスの数学者 Euler (1707—1783) に始まる．彼は次のような問題を考察した．

空間に2定点A，Bが与えられている．いま，A，Bを結ぶ曲線Cをとる．質点pが初速度零でAを出発し，重力の作用のもとに曲線Cに沿って点Bに到達するとき，その所要時間を最小とするような曲線Cを求めよ．

この問題の考察から，Euler の変分方程式が発見され，変分法が始まった．同じ頃，フランスの d'Alembert (1717—1783) は解析的方法を Newton 力学に導入し，Newton 力学を微分方程式と結びつけた．弦の振動に関する彼の研究は Euler によって取り上げられ，Daniel Bernoulli, Lagrange を経て Fourier (1768—1830) の理論につながった．

イタリアのトリノ生まれで，フランスの名門の出身でもある Lagrange (1736—1813) は数学，力学および天文学の研究を行ったが，特に，Newton 力学を徹底的に解析化し，解析力学の基礎を築いた．

一般に n 個 ($n \geqq 2$) の質点が万有引力のもとで運動するとき，その運動を記述

するという問題を n 体問題という．2体問題は Newton によって完全に決定されたが，その次に問題となったのが3体問題である．Lagrange はこれを研究し，特殊解として，直線解と正三角形解が存在することを示した．

Laplace(1749—1827) はフランス革命の時代に Napoleon の内務大臣を勤めたこともある数学者・天文学者である．彼は大著「天体力学」(この第1巻は Napoleon に献呈されている) を発表し，高い評価を得た．有名な Laplace 方程式は，この第2巻に現れるが，これは天体の形状に関する研究に有用であると述べられている．また，太陽系の起源に関する Kant・Laplace の星雲説は有名である．

3体問題は18世紀から19世紀にかけて，解析力学の中心課題であった．特に，太陽系の安定性について，Laplace, Lagrange, Poisson (1781—1840), Dirichlet (1805—1859) 等の研究があるが，彼等はすべて，太陽系の安定性を証明したと宣言した．しかし，本当の意味での解決は，1960年代の Kolmogorov・Arnold・Moser の理論をまたねばならなかった．

19世紀に入り，アイルランド出身の Hamilton (1805—1865) とドイツの Jacobi (1804—1840) によって，Hamilton 関数，正準方程式，Hamilton・Jacobi の方程式等が定式化された．これらは Poincaré と E. Cartan (1869—1951) の微分形式によって，シュプレクティック多様体の上の力学系として定式化された．このように，解析力学は現代微分幾何学の源泉の1つでもある．

01・4 Poincaré と力学系理論

Poincaré (1854—1912) は数学，天体力学，物理学，哲学等多くの分野で，多くの重要な貢献を行ったフランスの代表的学者である．3体問題とこれに関連する話題は，彼の最も興味を引いたものの1つであった．この問題に関連して，現在では力学理論の基礎となった，常微分方程式の定性的理論を創始し，これに関連して，20世紀の数学を特徴づけるものの1つである位相幾何学の基礎理論を構築した．

1885年，スウェーデンの国王 Oskar 二世は，1889年に行われる予定の彼の還暦祝の行事の1つとして，数学解析の分野で賞を設定し，Weierstrass (1815—1897), Hermite (1822—1901), Mittag-Leffler (1846—1927) の3人にその審査

を依頼した．彼等は4つの問題を出題したが，Poincaré はその第1問題である3体問題に応募し，賞を獲得した．

3体問題は，18次元空間の1階常微分方程式で表される．これを求積法で解く試みがなされ，合計10個の第1積分が発見されていた．1887年に，Bruns (1848—1919) が既知の10個の第1積分以外に，代数的な第1積分は存在しないことを示した．Poincaré はその受賞論文で，既知のもの以外に1価解析的なものは存在しないことを証明した．これらの結果は，定量的（解析的）な方法では3体問題が解決されないことを示すものであって，解析力学はここに危機を迎えた．

この危機を回避し，力学系研究の新しい方向を指し示したのは Poincaré 自身であった．彼は「微分方程式で定義される曲線について」という4部に及ぶ大論文において，位相的な方法を駆使して，いわゆる定性的理論を展開し，その有効性を示した．位相幾何学はこの研究のために Poincaré によって創始されたといっても過言ではない．Newton がニュートン力学のため微積分法を必要としたように，Poincaré は新しい力学理論のため，位相幾何学を必要としたのである．

力学系における定量的方法とは，解析的に解を求めることによって，解の挙動を研究しようとする方法であるが，定性的方法とは解曲線群の作る図形，すなわち相図の位相的手段による研究から，平衡点（特異点）や周期軌道の存在と，その個数の評価等を行うものである．このような問題を考察するためには，むしろ定性的方法の方が有効である．

曲面上のベクトル場の特異点の個数に関する Poincaré の定理は，上記論文に含まれている．その他，平面の上のベクトル場に関する Poincaré・Bendixson の定理，2次元トーラスの上の特異点をもたないベクトル場の回転数の理論等も上記論文に含まれている．

Poincaré は，「天体力学の新しい方法」という3巻に及ぶ大著を発表しているが，この著書やその他の論文に，Poincaré・Carathéodory の再帰定理，Poincaré・Sternberg の線形化定理，ホモクリニック点とヘトロクリニック点の発見，特異点の分岐理論，Poincaré・Birkhoff の幾何学的定理等，現代力学系理論の基礎をなす重要な定理や理論を発見し，力学系理論の創始者となった．

01·5 Birkhoff と Ljapunov 力学系理論の共同構築者

Poineаré に次いで現代の力学系理論の基礎を築いたのは，アメリカの Birkhoff (1884—1944) とロシアの Ljapunov (1857-1914) である．

Birkhoff は多方面に業績を残した数学者であるが，彼の成熟期に力学系の研究を行った．彼の力学系に関する最初の仕事は，Poincaré の幾何学的定理の証明である．Poincaré は制限 3 体問題の研究から，次のような定理が成立すれば制限 3 体問題に無限個の周期解が存在することを証明できることを知った．すなわち，2 つの同心円によって囲まれた平面領域から，それ自身への面積を保つ同相写像は，ある条件のもとで不動点（固定点）をもつという定理（予想）である．Poincaré は，この予想が妥当であることを示し，その証明を若い数学者にゆだねた．Birkhoff は，1913 年，30 歳に満たない若さでこれを証明し，一躍有名になった．彼は直接 Poincaré の教えを受けたわけではないが，著書を通じて Poincaré の影響を受け，真の師は Poincaré であったと言えよう．

彼の力学系に関する貢献は，大別して次の 2 つである．第一は位相的諸概念を力学系理論に導入し，位相力学系の基礎を築いたことである．また，第二は Lebesgue の積分論を用いてエルゴード理論の創始者の一人となったことである．

Birkhoff が定義した位相力学的諸概念の中には，非遊走集合，中心運動，再帰運動，極限集合，位相推移性等がある．また，彼は Poincaré の切断面の方法を用いて，ホモクリニック点の近くに無限個の周期点が存在することを示した．そして，Poincaré や Hadamard (1865—1963) の測地流の研究を押し進め，Morse (1892—1977) や Hedlund (1904—　　) の記号力学系（推移写像）の理論や大域変分学の先駆者となった．

エルゴード理論は 19 世紀末にオーストリアの物理学者 Boltzmann (1844—1906) によって提唱されたエルゴード仮説を起源にもつ．エルゴード仮説は熱の分子運動論に用いられた．この仮説を数学的に表現すると，力学系の任意の点から出発する軌道は，十分長い時間の後には，他の任意の点を通るということである．このような仮説を用いて，Boltzmann はエルゴード定理を証明した．エルゴード仮説が成立しないことは，後に証明されたが，1932 年 Birkhoff は，現在エルゴード性と呼ばれている条件の下で，エルゴード定理を証明し，Boltzmann

のエルゴード仮説をエルゴード性という条件に置き換えることを提唱した．このBirkhoff の（個別）エルゴード定理と von Neumann (1903—1957) の平均エルゴード定理が現代のエルゴード理論の出発点である．

Ljapunov は Poincaré と同時代に活躍した．特異点や周期軌道の安定性に関する彼の理論は，力学系理論の重要な部分を占め，現在，制御理論にも応用されている．彼の理論は，いわゆる Ljapunov 関数を用いて，具体的に解を求めることなく，特異点や周期軌道の安定性を調べるということであって，定性的方法の1つの方向を示すものである．

01·6　初期の発展

1922年に van der Pol (1889—1959) は真空管の発振現象が，Poincaré の極限閉軌道の概念を用いて説明できることを発見した．これは Poincaré の新理論の工学への最初の重要な応用であった．この方向については，Liénard, Cartwright, Littlewood, Levinson, Andronov, Vitt 等によって，非線形振動論として発展する．

Poincaré 以前にも，Gauss の超幾何微分方程式の相図の研究が，Riemann, Kummer, Goursat 等によって行われたが，Poincaré は相図の位相的研究を定性的理論の中心においた．2次元空間のベクトル場の相図の位相的研究に関して，Poincaré の後を継いだのは，1924年から1954年にかけての Kneser, Whitney, Denjoy, Kaplan, Markus 等である．

1939年に，Hedlund と E. Hopf (1902—　) は，負の定曲率曲面の測地流のエルゴード性を証明した．測地流は Hamilton 系の研究に関して最も重要なものであるが，エルゴード性の証明が与えられたものとしては最初のものである．

記号力学系は最も重要な位相力学系の1つであるが，その起源は2つある．その1つは負の定曲率曲面の測地流の研究からくるものであって，Hadamard, Birkhoff, Morse, Hedlund と発展したものである．もう1つは非線形振動論からくるもので，Cartwright, Littlewood および Levinson (1912—　) によるものである．

01·7 構造安定性と Lefschetz 学派

1937年にソビエトの Andronov (1901—1952) とPontrjagin (1908—　) は，物理学や工学において重要な系は小さい摂動を行っても，その相図が位相的に変化しないような系であるとして，このような系を「粗い系」と呼び，2次元の円板の上のある種の解析的なベクトル場が粗い系であるための必要十分条件を決定した．この系の重要性を認め，「粗い」という代わりに「構造安定」という名前を与え，この系の研究を推進したのが Lefschetz (1884—1972) である．

Lefsehetz はモスクワに生まれ，パリで学んだ．Westinghouse 社の技師になったが，事故で両腕をひじの下から失い，アメリカで数学を勉強し直して数学者に転向した．彼は代数幾何学と位相幾何学で大きい業績をあげたが，晩年は力学系理論と制御理論を研究し，研究組織者としても活躍した．アメリカ合衆国のみならず，南北アメリカ大陸の数学振興にも大きく貢献し，さらに今日の力学系研究の基礎を築いた．

Lefschetz の不動点定理は位相幾何学の最も重要な定理の1つであるが，これは，本質的には Poincare·Hopf の定理の拡張でもあり，力学系理論に不可欠である．彼は工学出身者らしく，エネルギー保存則の成り立つ Hamilton 系より，エネルギーの損失が起こる散逸系に着目した．彼の弟子には de Baggis, Peixoto, Markus (1912—　), Lasalle (1916—　) 等がいる．

Peixoto はブラジル出身の数学者で，Andoronov·Pontrjagin の定理を拡張し，向き付け可能な2次元閉曲面上のベクトル場の構造安定性に関して基本的な仕事を行った．

01·8 Smale と微分可能な力学系

Smale (1930—　) は微分位相幾何学の初期の発展に最も大きな貢献をした1人である．彼は Michigan 大学で Bott のもとに学び，学位を得た．球面の Euclid 空間へのはめ込みに関する仕事をした後で一般化された Poincaré 予想を証明した．すなわち，$n\geqq 5$ のとき，$(n-1)$ 連結な n 次元閉多様体は球面と同相であるという定理である．ここで $n=3$ の場合が Poincaré 予想で，未だ解決されていない．

彼は Morse 理論を精密に考察し，多様体のハンドル分解という概念に到達し，

これを用いて上の定理を証明した．さらに，この概念を用いて h 同境定理を証明している．多様体のハンドル分解は微分位相幾何学で基本的であるが，これは微分可能な力学系の理論にも用いられた．

Smale は1960年に Peixoto の構造安定性定理を，Thom の横断性の概念を用いて，一般の次元の場合に拡張しようと試み，現在 Morse•Smale 系と呼ばれる力学系を定義し，その特異点と周期軌道の個数の評価に関する Morse•Smale 不等式を証明した．これは2次元閉曲面のベクトル場の特異点の個数に関する Poincaré の定理の一般化でもある．この証明の中で，彼は Morse•Smale 系の特異点と周期軌道の安定多様体による全体の多様体の分割を用いた．彼は Morse•Smale 系が構造安定な系のすべてであって構造安定な力学系は力学系全体の中で稠密に存在するであろうと予想した．これが彼の力学系研究の端緒をなした．

Morse•Smale 系が構造安定であることは Palis と Smale によって証明されることになるが，Morse•Smale 系以外に構造安定な系が存在する．Morse•Smale 系の特異点や周期軌道の個数は有限個であるが, Poincaré, Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Levinson 等の仕事から，無限個の周期軌道をもつ構造安定な力学系が存在することを，Levinson が指摘した．この指摘に基づき，Smale は Levinson の例から幾何学的モデルを作ることを試み，馬締形力学系を定義した．これはホモクリニック点を含み，無限個の周期点を含む構造安定な2次元の離散力学系である．この力学系に，懸垂という操作を行うと無限個の周期軌道をもつ（連続）力学系が得られる．

次いで，彼は勾配力学系を考察しているうちに，高次元 Poincaré 予想の解決法をこれに関連して発見した．

1961年に Smale はソ連のキエフで開催された非線形振動論の国際会議に出席し, 馬締形力学系を発表した．そしてモスクワのステクロフ研究所で講義を行い，負曲率空間の測地流やトーラスの上の双曲型自己同型写像が構造安定であろうという予想を述べた．これを聞いた Anosov は，現在 Anosov 系と呼ばれる力学系を定式化し，負曲率空間の上の測地流が Anosov 系であること，Anosov 系は構造安定であること，ある条件下で Anosov 系はエルゴード的であること，負曲率空間の上の測地流は構造安定であることを証明した．また，Arnold の結果を用いると，Anosov 自身の結果と合わせて，負曲率空間の測地流がエルゴード

的であることを証明した.

その後, Smale は構造安定な系が力学系全体の空間の中で稠密でない例を発見した後, Morse・Smale 系, 馬締形力学系, および Anosov 系すべてを含むものとして公理A力学系を定義し, その基礎理論を 1967 年に発表した.

上述した以外の彼の業績のうち主なものは, 双曲型特異点や双曲型周期軌道等の安定多様体の理論, Poincaré・Birkhoff の切断面の理論の拡張と離散力学系の懸垂の理論, Kupka・Smale の近似定理, 横断的なホモクリニック点の近傍における力学系の構造と記号力学系の関係を述べた Smale の定理 (Birkhoff の定理の拡張), Ω 安定性定理等である.

Smale は, カタストロフ理論で有名なフランスの Thom から強い影響を受けたが, 彼の力学系研究の哲学は, 病理学的な挙動をする力学系を排除した「一般的」な力学系と, その位相共役による分類を目標とするもので, 特に構造安定な系と公理A力学系をめぐる理論が中心となる, 公理A力学系は双曲型という概念の窮極の姿と考えられる. 彼は, 微分同相写像の定める離散力学系の研究からベクトル場等の定める連続力学系の理論も平行して得られることが多く, また離散力学系の理論の方が連続力学系の理論より簡明であるとし, 微分同相写像の定義する離散力学系の研究を重視した. 彼は, 時に, 間違った予想を立てることもあるが, 常に研究を正しい方向に向け, 今日の微分可能な力学系理論の開拓者となった.

01・9 ソ連における研究とエントロピー

Ljapunov や Andronov, Pontrjagin の伝統を継いで, ソビエトでは常微分方程式, 非線形振動論, 制御理論等が盛んに研究され, 多くの重要な成果が得られている. Ljapunov, Nemytskii, Stepanov, Andronov, Khaiken, Vitt, Pliss 等の著書が英訳され, 大きな影響を与えている. キエフでは非線形振動論の国際会議等がしばしば開催され, 研究者も多い.

前に記したように, Anosov は Smale の予想から出発し, Hedlund と E. Hopf の結果を拡張し, 一般次元の負曲率空間の測地流の構造安定性とエルゴード性を証明したが, そこで用いられた Anosov 系の理論では, 安定多様体と不安定多様体の定める 2 種類の自然な葉層構造が重要な役割りを果たしている.

Sinai は統計力学やエルゴード理論に大きい貢献を行い, 特に, 撞球問題のエ

ルゴード性の発見で有名である．彼の力学系に関する研究の中には，Anosov と共に行った負曲率空間の測地流のエルゴード性の研究も有名であるが，さらに，Anosov 系の葉層構造を利用したマルコフ分割の発見は重要で，Anosov 系のエルゴード理論の基礎となった．

Poincaré によって3体問題の一般解は既知関数の無限級数で表すことができないことが証明された．しかし，Weierstrass が指摘したように，どのような解もこのような展開ができないということを証明したわけではなかった．実際，ドイツの Siegel (1896—　　) の研究もあり，ソ連の Kolmogorov (1903—　　) と Arnold (1937—　　)，Siegel の弟子の Moser (1928—　　) 等によって，いわゆる小さい分母の問題が解決され，収束する無限級数解が相当多く存在することが証明された．これは，現在，Kolmogorov・Arnold・Moser の理論（略して KAM 理論）と呼ばれているが，太陽系の安定性を保証するものであって，長年の難問を解決する大きな成果である．しかし，3体問題がすべて解決したというわけではない．

Kolmogorov は現代の確率論の基礎を築いた大数学者であるが，Sinai と共に 1958～1959 年に確率論的エントロピーの概念を定義した．エントロピーの概念は，19 世紀の半ばに，ドイツの物理学者 Clausius (1822—1888) によって，熱力学研究のために導入された．これは，物質または場からなる系の状態量の1つ（岩波；理化学辞典）である．また，アメリカの Shannon (1916—　　) は情報理論と呼ばれる分野を開拓したが，熱力学的エントロピーのアナロジーとして，情報量を表す量としてエントロピーを定義した，Kolmogorov と Sinai は，この Shannon のエントロピー概念から確率論的エントロピーを定義したのである．

古典力学における Hamilton 系においては，エネルギー保存則が成立するので，その軌道は等エネルギー面内を動く，Liouville (1908—1982) の定理によると，等エネルギー面上には，この力学系によって定義される流れに関して不変な滑らかな測度が存在する．このような事実から，Kolmogorov, Arnold, Sinai 等は確率空間の上の保測写像を古典力学と定義し，古典力学系のエントロピーとエルゴード理論を研究した．

1965 年，Adler・Konheim・McAndrew はコンパクト空間からそれ自身への連続写像に対して，位相的エントロピーを定義した．これは，Kolmogorov・Sinai

のエントロピーのアナロジーとして定義されたものであって，その連続写像による軌道の複雑度を表す量である．位相的エントロピーは確率論的エントロピーの上限であることが知られている（Dinaburg, Goodman, Goodwyn 等の研究）．

01・10 Smale 以後

微分可能な力学系に関する Smale の理論は彼の仲間や弟子達によって大きく発展した．そのすべてを述べることは不可能であるから，一部だけに限って述べることとする．例えば，Robbin と Robinson は1971年〜1974年にかけて強横断性条件を満たす微分可能力学系の構造安定性を証明した．これは Anosov や Palis・Smale の構造安定性定理を含むものであって，Smale 学派の理論の1つの頂点をなすものである．上記定理の逆は安定性予想と呼ばれる難問で，低次元の場合は解決されたが，一般には解決されていない．この定理の証明には，双曲型集合の安定多様体の理論が重要な役割りを果たすが，これについては，Hirsch, Pugh, Shub による研究がある．

公理A力学系の非遊走集合の力学的構造については Smale のスペクトル分解定理が基本となるが，さらに詳しい構造については，若くして世を去ったアメリカの Bowen (1947—1978) の研究がある．彼は Sinai の結果を拡張して公理A力学系の非遊走集合に Markov 分割が存在することを示し，これを用いて，ベルギーの物理学者・数学者 Ruelle と共に公理A力学系のエルゴード理論を構築し，統計力学に大きく貢献した．この本の多くの部分は Bowen の仕事の影響下にあると言ってよい．

現在の大きな話題の1つとして「カオス」についてふれよう．1963年に，気象学者 Lorenz が対流の方程式から3次元の非線形常微分方程式（現在 Lorenz 系と呼ばれる）を導き，これを数値的に解析し，現在カオスと呼ばれる現象を発見した．

流体力学に現れる「乱流」の現象は古くから科学者の興味をひいた．物理学者 Landau と Lifschitz による理論等もあったが，前述の Ruelle とオランダの Takens は1971年に Smale の力学系と，力学系の分岐に関する E. Hopf の理論を用いて乱流を説明しようと試み，多くの科学者の興味をひいた．

1975年，数理生物学者 May は，世代交替が行われる昆虫の個体数の変化を表

す単純な1次元写像の力学的挙動を数値的に解析し，カオスを発見した．同じ年，Li と Yorke は Lorenz と May の仕事に刺激されて，数学的にカオスを定義した．その後，カオスと力学系の分岐理論は多くの科学者の興味をそそるところとなり，現在最も活発に研究されている分野の1つとなっている．

参考文献　白岩謙一：力学系の発展について，数学，第38巻第1号（1986），岩波書店．

§ 02　力学系とは何か

ここではまず抽象的な形で力学系の定義を述べ，次いでその例をあげる．ここで出てくる術語や概念については，第2章以後に詳しい説明があるのでそれらを参照されたい．

02·1　力学系の定義

自然科学や社会科学，人文科学等に現れる種々のシステムが一定の法則の下で時間と共に変化するとき，その変化の状態を数学的に調べるのが力学系の研究である．そのため，第一になすべきことは，これらのシステムの数学的モデルを作ることである．

与えられたシステムの数学的モデルを作るとき，第一に問題となるのは，そのシステムの状態を完全に記述するのに必要なもの（パラメーター）は何か，ということである．通常これらはいくつか（有限個）の連続的なパラメーター（実数）によって完全に定まる．場合によっては，これらのパラメーターの間に，いくつかの関係式が成り立っていることもある．

例えば，3次元空間を運動する質点の状態は，その位置を定める3つの座標 (x, y, z) と速度ベクトル（または運動量）を定める3つの成分 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 合計6個のパラメーターによって決定される．もし，この質点が原点を中心とする半径1の球面 $S^2=\{(x, y, z)\,;\,x^2+y^2+z^2=1\}$ の上を動くものとすると，これら6個のパラメーターの間には，$x^2+y^2+z^2=1$，$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0$ という関係式が成立しなければならない．

このように，あるシステムが取り得るあらゆる状態全体の作る空間（集合）X は，ユークリッド空間か，またはいくつかの方程式で定義されるユークリッド空間の部分空間（例えば多様体）であることが多い．一般に，我々はこのような空

間 X は位相空間であると仮定し，これを**状態空間**または**相空間**と呼ぶ.

あるシステムの状態空間 X が定まったとして，次に問題となるのがシステムの状態の変化の定式化である．ここで我々は簡単のため次の3つの仮定をおくことにする.

（I） 時刻 $t_0, t_1 \in \boldsymbol{R}$（実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す）を任意に定める．いま，時刻 t_0 におけるシステムの状態が x_0 のとき，時刻 t_1 においてシステム状態は x_1 になるものとする．このとき，x_1 は t_0, t_1, x_0 に対して一意的に定まるものと仮定する．すなわち，$t_0, t_1 \in \boldsymbol{R}$ に対して，写像

$$\pi(t_1, t_0): X \to X \text{ を } \pi(t_1, t_0)(x_0) = x_1,\ \ x_0 \in X$$

によって定めることができるものとする．ただし，ここで x_1 は時刻 t_0 において状態 $x_0 \in X$ であったシステムが時刻 t_1 においてとる状態とする.

この仮定は，状態の変化が決定論に従うということを意味する．そして，この仮定から次の（a)，(b）が成立することは明らかである.

（a） $\pi(t_2, t_1) \circ \pi(t_1, t_0) = \pi(t_2, t_0)$, $t_0, t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$.

（b） $\pi(t_0, t_0) = 1_X$（1_X は X の恒等写像），$t_0 \in \boldsymbol{R}$.

（II） $\pi(t_1, t_0): X \to X$ は $t = t_1 - t_0$ だけに依存して定まるものと仮定する．すなわち，状態の変化は経過した時間（負の時間を含め）だけに関係して定まるという仮定である．この仮定は定常流という仮定である．いま，

$$\pi_t: X \to X,\ t \in \boldsymbol{R} \text{ を } \pi_t = \pi(t_1, t_0),\ \ t = t_1 - t_0$$

と定めると，これは仮定からうまく定義され，（I）の（a)，(b）は次の形に書き変えることができる.

（a)′ $\pi_t \circ \pi_s = \pi_{t+s}$, $t, s \in \boldsymbol{R}$.

（b)′ $\pi_0 = 1_X$.

（III） 次に，写像

$$\pi: X \times \boldsymbol{R} \to X \text{ を } \pi(x, t) = \pi_t(x),\ \ x \in X, t \in \boldsymbol{R}.$$

によって定めるとき，π は連続写像であると仮定する．すなわち，十分近い（似た）状態から出発すれば，ほとんど等しい時間が経過した後の状態は近い（似ている）ということを意味するものである.

以上3つの仮定をすると，力学系の定義として，我々は次のものを採用することになる.

定義，位相空間 X と写像 $\pi: X\times\boldsymbol{R}\to X$ が与えられたとき，これらが次の3つの条件を満たすとき，(X,π) を**力学系**，または**流れ**という．

（0） π は連続写像である．

いま，$t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\pi_t: X\to X$ を $\pi_t(x)=\pi(x,t), x\in X$ で定義すると，

（1） $\pi_t\circ\pi_s=\pi_{t+s}$，$t, s\in\boldsymbol{R}$.

（2） $\pi_0=1_X$ 　（1_X は X の恒等写像）.

上の（1），（2）の条件から，次の（3）が直ちにわかる．

（3） 各 $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\pi_t: X\to X$ は全単射で，その逆写像は

$(\pi_t)^{-1}=\pi_{-t}$ で与えられる．

次に（0）から，各 $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\pi_t: X\to X$ は連続写像である．したがって（3）と合わせて次の（4）がわかる．

（4） 各 $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\pi_t: X\to X$ は同相写像である．

特に $t=1$ とし，$f=\pi_1: X\to X$ とおくと，f は同相写像で，自然数 n に対して，次の等式が成立する．

$$\pi_n=\pi_1\circ\cdots\circ\pi_1=f\circ f\circ\cdots\circ f=f^n \quad (n \text{ 回の合成})$$
$$\pi_{-n}=\pi_{-1}\circ\cdots\circ\pi_{-1}=f^{-1}\circ\cdots\circ f^{-1}=(f^{-1})^n=f^{-n} \quad (n \text{ 回の合成})$$

また，一般に $f^0(x)=1_X(x)=x$，$x\in X$ と定義する．

したがって，時間が離散的に動くとき，例えば，一定の時間間隔（これを単位時間にとる）で観測するとき，力学系は，同相写像 $f: X\to X$ と考えられる．一般に離散力学系は次のように定義される．

定義 位相空間 X と同相写像 $f: X\to X$ が与えられたとき，(X,f) を（**離散**）**力学系**という．

このように離散力学系を定義するとき，すべての離散力学系が，時間が連続的に動く力学系から，上のような方法で得られるとは限らないことが知られている．

一般に力学系 (X,π) が与えられたとき，$x\in X$ に対して

$$O(x)=\{\pi_t(x)\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}$$

を x を通る**軌道**という．これは，時刻 $t=0$ で $x\in X$ という状態にあるシステムの時間と共に変化する状態の軌跡である．

離散力学系 (X,f) に対して，$x\in X$ を通る軌道は

$$O(x)=\{f^n(x)\,;\,n\in \boldsymbol{Z}\},\ \text{ここで}\ \boldsymbol{Z}=\text{整数全体の集合}$$

で与えられる．

力学系理論は，力学系の軌道の振舞いを研究する理論である．特に，時間を正または負の無限大にしたときの軌道の振舞いや，軌道相互の関係等について調べたり，力学系を摂動（少し変化）させたとき，軌道全体の構造がどのように変化するかを調べることである．

02·2　自励系常微分方程式と力学系

力学系の典型的な例として，自励系の常微分方程式から生成される力学系を考察しよう．n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の領域 D で定義された n 個の C^1 級関数 $f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)$ が与えられたとき，次のような自励系の常微分方程式を考える．

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(x_1,\cdots,x_n) \end{cases} \qquad (x_1,\cdots,x_n)\in D$$

実数の区間 J で定義された n 個の微分可能な関数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ が（5）の解であるとは，任意の $t\in J$ に対して $(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\in D$ で

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(t)}{dt}=f_1(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d\varphi_n(t)}{dt}=f_n(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)) \end{cases} \qquad t\in J$$

が成立するときをいう．$t=t_0$ のとき $\varphi_1(t_0)=x_1,\cdots,\varphi_n(t_0)=x_n$ となるとき，この解は，$t=t_0$ のとき，初期条件 $(x_1,\cdots,x_n)$ を満たすという．

上の方程式（5）は D のベクトル場と考えられる．以下ベクトル記号を用いることとし，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in D$ に対して，

ベクトル　$f(x)=(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n))\in \boldsymbol{R}^n$

を対応させる写像 $f: D\to \boldsymbol{R}^n$ を考えると，これは D の上のベクトル場である．そして，方程式（5）は次の形の式（5）′ になる．

$$(5)'\quad \frac{dx}{dt}=f(x),\quad x\in D.$$

ただし，$\dfrac{dx}{dt}=\left(\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \cdots, \dfrac{dx_n}{dt}\right)$ とする．

区間 J で定義され，値を $\boldsymbol{R}^n$ にもつ写像

$$\varphi : J\to\boldsymbol{R}^n,\ \ \varphi(t)=(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)),\ \ t\in J$$

が（5）′ の解であるとは，各 $\varphi_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$ は微分可能で

$$\varphi(t)\in D,\ \ t\in J$$

$$(6)'\quad \frac{d\varphi(t)}{dt}=f(\varphi(t)),\ \ t\in J$$

が成立することである．

すなわち，$\varphi(t)$ は D に含まれる滑らかな曲線であって，点 $\varphi(t)$ における接ベクトル $d\varphi(t)/dt$ はベクトル場 $f(x)$ の点 $\varphi(t)$ における値 $f(\varphi(t))$と一致するとき $\varphi(t)$は(5)′の解である．そこで $\varphi : J\to\boldsymbol{R}^n$ を(5)′ の**解曲線**という．

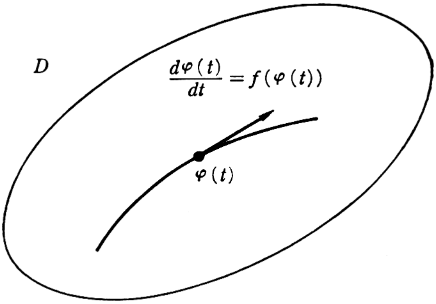


図 1·1

いま，D の各点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ に対し，$t=0$ で x を通る解 $\varphi(t)$ が，$t\in\boldsymbol{R}$ でただ1つ存在するものと仮定する．このような解を $\varphi^x(t)$ と書くと，$\varphi^x(0)=x$，$d\varphi^x(t)/dt=f(\varphi^x(t))$，$t\in\boldsymbol{R}$ が成立する，そこで，写像 $\pi : D\times\boldsymbol{R}\to D$ を

$$\pi(x, t)=\varphi^x(t),\ \ x\in D,\ \ t\in\boldsymbol{R}$$

と定義すると，(D, π) は力学系となることが証明できる．この力学系を，自励系の方程式（5）（またはベクトル場 $f: D\to\boldsymbol{R}^n$）の生成する力学系という．

一般に，微分可能な多様体 M の上の完備な C^1 級ベクトル場 X に対して，同様な議論を行うと，M の上の（微分可能な）力学系が自然に定まる．特に，M がコンパクトのとき，M の上の任意の C^1 級ベクトル場は完備であるので，M の上の（微分可能）力学系を生成する．

02·3　周期的常微分方程式と離散力学系

D を $\boldsymbol{R}^n$ の領域とし，$f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(t, x_1, \cdots, x_n)$ を $\boldsymbol{R}\times D\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$

で定義された C^1 級関数とし，次の方程式を考える．

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,\cdots,x_n) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,\cdots,x_n) \end{cases} \qquad t\in\boldsymbol{R},\ (x_1,\cdots,x_n)\in D$$

区間 J で定義された n 個の C^1 級関数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ が（7）の解であるとは，各 $t\in J$ に対して $(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\in D$ であって

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(t)}{dt}=f_1(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d\varphi_n(t)}{dt}=f_n(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)) \end{cases} \qquad t\in J$$

が成立するときをいう．$t=t_0$ のとき $\varphi_1(t_0)=x_1,\cdots,\varphi_n(t_0)=x_n$ となるとき，この解は初期条件 $t=t_0$ で$(x_1,\cdots,x_n)$ を満たすという．

これをベクトル記号を用いて表すと，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in D$ とし

$$f(t,x)=(f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(t,x_1,\cdots,x_n))$$

と書くと，$f:\boldsymbol{R}\times D\to\boldsymbol{R}^n$ であって，（7）は次の

$$(7)'\quad \frac{dx}{dt}=f(t,x),\ (t,x)\in\boldsymbol{R}\times D$$

となる．また，$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$，$t\in J$ と書くと（8）は

$$(8)'\quad \frac{d\varphi(t)}{dt}=f(t,\varphi(t)),\ t\in J$$

となる．

いま，各 $f_i(t,x)$ $(i=1,\cdots,n)$ が t に関して周期 1 の周期関数，すなわち

$$f(t+1,x)=f(t,x),\ t\in\boldsymbol{R},x\in D$$

を満たすものとする．そして，D の各点 x に対して，$\varphi^x(0)=x$ を満たす解が $t\in\boldsymbol{R}$ で存在するものと仮定する．すなわち，解 $\varphi^x:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^n$ で $\varphi^x(0)=x$ を満たすものが存在するものとする．このとき，写像

$$T:D\to D \text{ を } T(x)=\varphi^x(1),\ x\in D$$

と定義すると，これは（微分）同相写像となる．この T を方程式（7）$'$ の Poincaré 写像という．

自然数 n に対して，$T^n(x)=x$ となる点 $x\in D$ を T の **n 周期点**という．x が

T の n 周期点ということと，$t=0$ で x を通る解 $\varphi^x(t)$ が周期 n の周期解であること，すなわち $\varphi^x(t+n)=\varphi^x(t)$，$t\in \boldsymbol{R}$ が成立することは同値である．このように，周期的な常微分方程式を研究するためには，その Poincaré 写像の作る離散力学系 (D,T) の研究が有用である．

以上の議論は，多様体の上の，時間に関して周期的に変化するベクトル場についても拡張することができる．

02・4 切断面と離散力学系

n 次元自励系方程式の周期軌道 C が与えられたとき，C の近傍での解の振舞いを調べるためには，Poincaré の切断面の方法が有効である．すなわち，C に対して横断的に交わる（例えば直交する）$(n-1)$ 次元の曲面 Σ をとり，Σ と C の交点を p とする．点 p の Σ における近傍 V を十分小さくとると，V の各点 x に対して，x を通る解は C の周期 $\tau>0$ に十分近い時間の後に，始めて Σ に帰ってくる．この交点を $T(x)$ とおく．このようにして定まる写像 $T:V\to\Sigma$ は十分小さい V に対して，V から Σ の中への同相写像である．そして，$T(p)=p$ が成立する．この T を切断面 Σ による Poincaré 写像という．いま，$x\in V$ を T の n 周期点，すなわち $T^n(x)=x$ とすると，x を通る解は，周期が約 $n\tau$ の周期解である．このように，周期軌道 C の近傍における解の挙動は，その Poincaré 写像 $T:V\to\Sigma$ の力学的構造と密接に関係している．

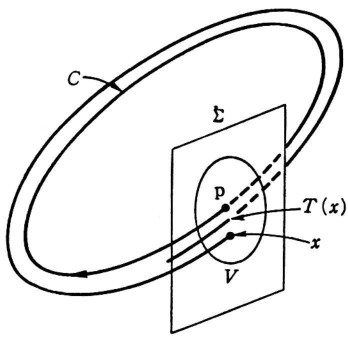


図 1・2

このような議論は Smale によってさらに一般化され，離散力学系と普通の力学系の間に密接な関係があることがわかった．これを基にして，Smale は離散力学系の研究の重要性を強調した．

3体問題において，1つの質点の質量が他の2つの質点の質量に比較して無視できる程小さく，これら2つの質点の運動にまったく影響を与えないものと仮定

して，小質量の質点の運動を調べる問題を制限3体問題という．Poincaré は制限3体問題を研究し，次の定理が成立すれば，制限3体問題に無限個の周期解が存在することを発見した．

Poincaré・Birkhoff の幾何学的定理

2つの同心円 C_1, C_2 で囲まれた平面の領域 R からそれ自身への面積を保つ同相写像 $f: R \to R$ が同心円 C_1, C_2 を互いに逆方向に回転させるならば，f は R の内部に2個の不動点をもつ．すなわち，$f(x)=x$, $x \in R - C_1 \cup C_2$ となる点 x が少なくとも2個存在する．

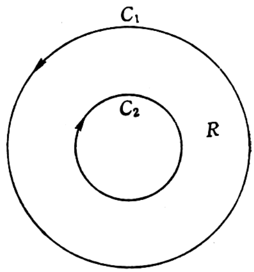


図 1・3

この定理は，前述したように，Birkhoff によって証明された．

一般の n 体問題の KAM 理論の中でも，Moser のトウイスト写像定理のように面積を保つ離散力学系に関する定理が重要な役割りを果たすことが知られている．

02・5　エントロピーと力学系

エントロピーは熱力学の第2法則に関連して，ドイツの物理学者 Clausius が導入した概念であって，「変化」を意味するギリシア語「トロペ」から作られた言葉である．熱力学の第2法則は，熱の出入りのない（したがってエントロピーの出入りのない）物体系では，その状態変化はエントロピーが増大する方向にだけ起こるということであって，エントロピー増大の法則とも呼ばれている．熱の出入りがないとき，エントロピーが最大になると，これ以上系の状態変化は起こらず平衡状態となる．そして，エントロピーが最大となるのは系内の物体の温度がすべて一定となるときである．

Shannon は彼の情報理論の中でエントロピーという概念を導入した．一般に，通報 a の与える情報量 $I(a)$ はその生起確率 $p(a)$ の単調減少な連続関数であると考えられる．すなわち，生起確率が高い事象の通報のニュース価値（情報量）は小さく，生起確率の低い事象の通報のニュース価値（情報量）は大きいものと考えられる．また，2つの独立な事象 a_1, a_2 の結合 a_1a_2 の生起確率は $p(a_1a_2)$

$=p(a_1)p(a_2)$ と考えられるが，その情報量は $I(a_1a_2)=I(a_1)+I(a_2)$ を満たすものと考えられる．このように仮定すると，$I(a)=-k\log p(a)$（k は正の定数）の形に表されることがわかる．いま，$k=1$ とおき，$I(a)=-\log p(a)$ を通報（事象）a の自己情報量という．

いま，確率事象の集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が与えられ，これらの生起確率はそれぞれ $p(a_1), \cdots, p(a_n)$ とする，また，この確率事象系 A が排反事象系であるとする．すると，この系 A の平均情報量（期待値）$H(A)$ は

$$H(A)=-p(a_1)\log p(a_1)-\cdots-p(a_n)\log p(a_n)$$

で与えられる．Shannon はこの $H(A)$ を系 A の事前エントロピーと呼んだ．これは，熱力学の気体分子のエントロピーを与える式と類似の式であるが，系 A の情報量のあいまいさ，または無秩序さの度合いを計る量であると考えられる．

Kolmogorov と Sinai は，この Shannon のエントロピーを基礎として，確率空間の保測写像に対してエントロピーを定義した．これは保測写像が確率空間を変換する度合いの複雑さを計る量であると考えられる．これは，保測写像の分類等に用いられる．

Adler・Konheim・McAndrew は Kolmogorov, Sinai の測度論的エントロピーのアナロジーとして，コンパクト位相空間からそれ自身への連続写像に対して位相的エントロピーを定義した．これは連続写像によって空間の点が動く度合いの複雑さを計る量と考えられる．そして，Dinaburg, Goodman, Goodwyn 等の結果によれば，写像 f の位相的エントロピーは，f-不変な Borel 確率測度に関する f の測度論的エントロピーの上限と一致する．

第2章　予　備　概　念

この章では，第3章以降で必要な事項のうち，基礎的な部分をまとめて，簡単な説明を行い，読者の便宜をはかることにする．詳細は，それぞれ成書を参照されたい．

§1 は基礎概念ということで，集合論と実数論からの諸概念を解説する．§2 は距離空間とその位相に関する諸概念の説明である．§3は位相空間論から，位相，連続写像，開写像と同相写像，直積空間，連結空間，コンパクト空間に関する準備を述べる．

§1　基　礎　概　念

範囲の確定したものをとりまとめて**集合**という．例えば，$0\leqslant x\leqslant 1$ を満足する実数 x の全体の集まりは集合である．集合を構成する個々のものを，その集合の点という．x が集合 A の点であることを x は A に属するといい

$$x\in A \quad \text{または} \quad A\ni x$$

と表す．有限個の点からなる集合を**有限集合**という．点をまったく含まない集合を**空集合**といい，ϕ で表す．集合 A の各点が集合 B に属するとき，A は B の**部分集合**，または A は B に**含まれる**といい

$$A\subset B \quad \text{または} \quad B\supset A$$

と書く．$A\supset B$ と $A\subset B$ が同時に成り立つとき，すなわち AとB がまったく同じ点からなる集合であるとき

$$A=B$$

と書く．$B\subsetneqq A$ のとき B は A の**真部分集合**という．集合 A, B に対し，A とBの点を合わせてできる集合を**和集合**といい $A\cup B$ と書く．すなわち

$$A\cup B=\{x:\ x\in A \ \text{または}\ x\in B\}.$$

集合 A, B に対し，A と B に共通な点全体の集合を A と B の**共通集合**といい，$A\cap B$ と書く．すなわち

$$A\cap B=\{x:\ x\in A \ \text{かつ}\ x\in B\}.$$

A に属して B に属さない点全体からなる集合を A と B の**差集合**といい

$$A \setminus B$$

と書く．集合 X の部分集合 A に対し

$$A^C = X \setminus A$$

を X に対する A の**補集合**という．A, B を X の部分集合とするとき，de Morgan の公式

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

が成り立つ．集合 X の部分集合の集まりを**集合族**という．一般に，集合 Λ を添数として，Λ の点 λ に対し，X の部分集合 A_λ が与えられたとき

$$\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

を **Λ を添数とする集合族**という．集合族に対し，和集合および共通集合をそれぞれ

$$\cup \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \{x : \text{ある } \lambda \text{ に対し } x \in A_\lambda\}$$

$$\cap \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = \{x : \text{すべての } \lambda \text{ に対し } x \in A_\lambda\}$$

によって定義して，それらを単に $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ および $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ と書く．集合 A と B に対し，$x \in A$ と $y \in B$ の対 (x, y) の全体からなる集合を A と B の**直積集合**といい $A \times B$ で表す．すなわち

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, \ \ y \in B\}.$$

同様に，$A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ に対して

$$\times_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{(x_\lambda) : x_\lambda \in A_\lambda, \ \ \lambda \in \Lambda\}$$

を $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ の直積集合という．

A, B を2つの集合とし，A の各点 x に B の点 y を対応させるある規則 f が与えられているとき，f を A から B への**写像**または**関数**といい

$$f : A \to B$$

で表す．写像 f によって点 x に点 y を対応させるとき，y を x の**像**といい，$y = f(x)$ と書く．A_1 を A の部分集合とするとき

$$f(A_1) = \{f(x) : x \in A_1\}$$

を A_1 の**像**という．

写像 $f : A \to B$ において，$f(A)$ は一般に B の部分集合であるが，特に $f(A) = B$ となるとき，f は**全射**あるいは A から B の**上へ**の写像という．B_1 を B の部分集合とするとき

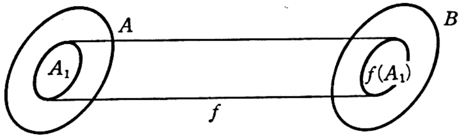


図 2·1

$$f^{-1}(B_1)=\{x\in A: f(x)\in B_1\}$$

を B_1 の**逆像**という．

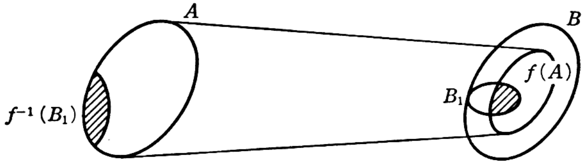


図 2·2

写像 $f: A\to B$ において，A の相異なる 2 点 x と x' が，B の相異なる 2 点 y と y' に対応するとき，すなわち

$$x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x')$$

のとき，f を**単射**あるいは 1 対 1 の写像という．写像 $f: A\to B$ が上への 1 対 1 の写像であるとき，f を**全単射**という．f が全単射ならば，逆に $y\in B$ に対し，$f(x)=y$ となる $x\in A$ を対応させる写像が存在する．これを f の**逆写像**といい，$f^{-1}: B\to A$ で表す．写像 $f: A\to B$ において，$A_1\subset A$ とする．A_1 の各点 x に $f(x)$ を対応させれば，写像 $f_1: A_1\to B$ が得られる．f_1 を f の A_1 への**制限**といい，$f|_{A_1}$ と書く．逆に f を f_1 の A への**拡張**という．A のすべての点 x に対し，$f(x)=y_0$ が B の決まった点であるとき f を**定値写像**という．

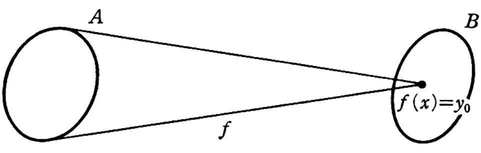


図 2·3

集合 A の各点 x に x 自身を対応させる写像を，A の**恒等写像**といい，これを

id で表す．写像 $f: A \to B$ と写像 $g: B \to C$ に対し，写像 $h: A \to C$ が $h(x) = g(f(x))(x \in A)$ によって与えられるとき，写像 $h: A \to C$ を f と g の**合成**といい

$$h = g \circ f$$

で表す．

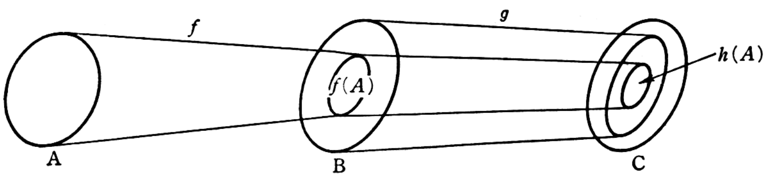


図 2·4

直積集合 $A \times B$ から A または B への写像 $P_A: A \times B \to A (P_A(x, y) = x)$, $P_B: A \times B \to B (P_B(x, y) = y)$ を**射影**という．

自然数全体の集合を N とする．このとき集合 A が**可算集合**であるとは，N から A への全単射である写像が存在するときをいう．集合 A が有限集合または可算集合であるとき，A は**高々可算**であるという．有限集合，整数全体の集合，有理数全体の集合は高々可算集合である．

同値関係と同値類について述べよう．集合 X の点の間に，ある関係$\sim$が定義されて，X の任意の点 x, y, z に対し

（1） $x \sim x$ (反射律).

（2） $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (対称律).

（3） $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (推移律).

が成り立つとき，関係$\sim$を**同値関係**という．集合 X に同値関係が与えられたとする．このとき $x \in X$ に対し，x と同値な点全体からなる集合を

$$X_x = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

とすると

（1） $x \in X_x$,（2） $x \sim y \Rightarrow X_x = X_y$,

（3） $x \nsim y \Rightarrow X_x \cap X_y = \phi$

が成り立つ．ここに $x \nsim y$ は x と y は同値でないことを表す．

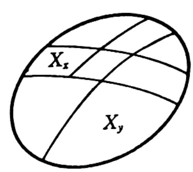


図 2·5

集合 X_x を x の**同値類**という．X は同値類によって分割される．このことを同値関係〜による X の**類別**という．

実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表し，それを**実数体**という．A を $\boldsymbol{R}$ の空でない部分集合とする．$\boldsymbol{R}$ の点 a がすべての $x \in A$ に対し

$$x \leqslant a$$

を満たすとき，a を A の**上界**という．このような上界が存在するとき A は**上に有界**であるという．上界の定義に現れた $x \leqslant a$ を $x \geqslant a$ で置き換えることによって，**下界**，**下に有界**が定義される．a が A の上界であるとき，a より大きい a' はすべて A の上界である．同様なことが下界についてもいえる．$\boldsymbol{R}$ の点 α が A の最小な上界であるとき，α を A の**上限**といい，$\sup A$ で表す．$\boldsymbol{R}$ の点 β が A の最大な下界であるとき，β を A の**下限**といい，$\inf A$ で表す．$\boldsymbol{R}$ において $\sup A$, $\inf A$ の存在を保障するのが次の **Weierstrass の公理**である；

（i） A が上に有界ならば，$\sup A$ が存在する．

（ii） A が下に有界ならば，$\inf A$ が存在する．

我々はこの公理を認めて実数を扱う．

実数列 $a_1, a_2, \cdots$ の極限について述べよう．数列 $\{a_n\}$ が上に有界（下に有界）であるとき，すなわち

$$a_n \leqslant \alpha (n=1,2,\cdots) \quad (a_n \geqslant \alpha (n=1,2,\cdots))$$

を満たす数 α が存在するとき，$\{a_n\}$ は上に**有界**（下に**有界**）であるという．

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \quad (a_1 \geqslant . a_2 \geqslant \cdots)$$

ならば，$\{a_n\}$ は**単調増加**（**単調減少**）であるという．実数 α が存在して任意の $\varepsilon > 0$ に対し，適当な自然数 n_0 があって

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

がすべての $n \geqslant n_0$ で成り立つとき，$\{a_n\}$ は α へ**収束**するといい

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

で表す．任意の $\alpha > 0$ （$\alpha < 0$）に対し，適当な自然数 n_0 をとると

$$a_n > \alpha \quad (a_n < \alpha)$$

がすべての $n \geqslant n_0$ で成り立つとき，$\{a_n\}$ は $+\infty(-\infty)$ へ**発散する**といい

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$$

で表す．上に有界な単調増加列，下に有界な単調減少列はそれぞれ収束する．

数列 $a_n, a_{n+1}, \cdots$ からなる集合の上限，下限をそれぞれ

$$\sup_{k\geqslant n} a_k, \quad \inf_{k\geqslant n} a_k$$

で表す．このとき次が成り立つ．

（1） $\inf_{k\geqslant n} a_k \leqslant \sup_{k\geqslant n} a_k$.

（2） $\{\sup_{k\geqslant n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であり，$\{\inf_{k\geqslant n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である．

（3） $\sup_{k\geqslant n} (-a_k) = -\inf_{k\geqslant n} a_k$, $\inf_{k\geqslant n} (-a_k) = -\sup_{k\geqslant n} a_k$.

数列 $\{\sup_{k\geqslant n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ の下限，数列 $\{\inf_{k\geqslant n} a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限

$$\inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant n} a_k, \qquad \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant n} a_k$$

をそれぞれ

$$\overline{\lim_{n}}\, a_n, \qquad \underline{\lim_{n}}\, a_n$$

で表し，$\{a_n\}$ の**上極限**，**下極限**という．数列 $\{a_n\}$ に対し次が成り立つ．

（4） $\underline{\lim_{n}}\, a_n \leqslant \overline{\lim_{n}}\, a_n$.

（5） $\overline{\lim_{n}}\, (-a_n) = -\underline{\lim_{n}}\, a_n$, $\underline{\lim_{n}}\, (-a_n) = -\overline{\lim_{n}}\, a_n$.

（6） $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-\infty < \underline{\lim_{n}}\, a_n = \overline{\lim_{n}}\, a_n < \infty$$

が成り立つことである．

最後に集合列 $\{A_n\}_{n=1,2,\cdots}$ の極限について述べよう．集合列 $\{A_n\}_{n=1,2,\cdots}$ において

$$\bigcap_{n\geqslant 1} (\bigcup_{k\geqslant n} A_k), \qquad \bigcup_{n\geqslant 1} (\bigcap_{k\geqslant n} A_k)$$

をそれぞれ

$$\overline{\lim_{n}}\, A_n, \qquad \underline{\lim_{n}}\, A_n$$

で表し，$\{A_n\}$ の**上極限**，**下極限**という．$\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n$ が成り立つときこの共通の集合を

$$\lim_n A_n$$

で表し，$\{A_n\}$ の**極限**という．極限が存在するとき，その集合列は**収束**するという．$\{A_n\}$ が $A_1 \subset A_2 \subset \cdots (A_1 \supset A_2 \supset \cdots)$ を満たすとき，単調増加（単調減少）であるという．$\{A_n\}$ が単調増加ならば，$\lim_n A_n = \bigcup_{n \geqq 1} A_n$，単調減少ならば，$\lim_n A_n = \bigcap_{n \geqq 1} A_n$ である．集合列 $\{A_n\}$ に対しては

$$\overline{\lim_n} A_n = \lim_n \bigcup_{k \geqq n} A_k, \quad \underline{\lim_n} A_n = \lim_n \bigcap_{k \geqq n} A_k$$

が成り立つ．

§2 距 離 空 間

2·1 距離と距離空間の上の位相

集合 X の任意の点 x, y に対し，実数 $d(x, y)$ が対応して次の条件を満たすとする．X の任意の点 x, y, z に対し

$d1$）$d(x, y) \geqq 0$ かつ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$d2$）$d(x, y) = d(y, x)$.

$d3$）$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$（三角不等式）.

このとき，d を X の上の**距離関数**という．このような距離関数の与えられた集合 X を**距離空間**といい，(X, d) で表す．$d(x, y)$ を x と y との間の距離という．距離空間 (X, d) において，$x \in X$ と実数 $\varepsilon > 0$ に対し

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

を，x を中心とする半径 ε の**開球**または x の **ε-開近傍**という．さらに

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$$

を，x を中心とする半径 ε の**球面**という．

実数を n 個並べたものを $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表し，このような x の全体を $\boldsymbol{R}^n$ と書く．$\boldsymbol{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, \cdots, y_n)$ の距離を

$$d(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\}^{1/2}$$

で与える．このとき d は $d1$)，$d2$)，$d3$) を満たし，距離関数である．これを**ユ**

ークリッドの距離という．R^n にこの距離が与えられているとき，R^n **を n 次元ユークリッド空間**という．今後，特に断らない限り，R^n にはユークリッドの距離が与えられているとする．

集合 X の任意の2点 x, y に対し

$$d(x, x)=0,\quad d(x, y)=1\quad (x\neq y)$$

とおけば，d は X の上の距離関数であり，(X, d) は距離空間となる．これを**離散距離空間**という．

距離空間 (X, d) の部分集合 A に対し

$$\mathrm{diam}\,(A)=\sup\{d(x, y)\,|\,x, y\in A\}$$

とおき，diam (A) を A の**直径**という．A の直径が有限ならば，集合 A は**有界**であるという．$A\subset X$ が有界であることは，X の任意の1点 x を中心とする開球 $U_r(x)$ が存在して，$U_r(x)\supset A$ となることである．

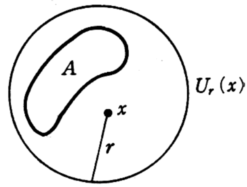


図 2·6

距離空間 (X, d) の部分集合 A, B に対し

$$d(A, B)=\inf\{d(x, y)\,|\,x\in A, y\in B\}$$

とおき，$d(A, B)$ を **A と B の距離**という．$A\cap B\neq\phi$ ならば，$d(A, B)=0$ であるが，逆に $d(A, B)=0$ であっても，必ずしも $A\cap B\neq\phi$ とは限らない．例えば，$X=\boldsymbol{R}^2$，$A=\{(x, 0): x\in\boldsymbol{R}\}$，$B=\{(x, 1/x): x\geqq 0\}$ とおくと，$A\cap B=\phi$ であるが，$d(A, B)=0$．



図 2·7

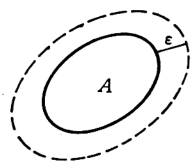


図 2·8

特に，$A=\{x\}$ の場合に

$$d(x, B)=\inf\{d(x, y)\,|\,y\in B\}$$

を**点 x と B の距離**という．$\varepsilon>0$ に対し，$U_\varepsilon(A)=\{x\in X\,|\,d(x, A)<\varepsilon\}$ は A を含む ε-開近傍である．

距離空間(X, d)の部分集合 O が**開集合**であるとは，O に属する任意の点 x に

対し，x のある ε-開近傍が O にまったく含まれるときをいう．すなわち，任意の $x \in O$ に対し，$\varepsilon > 0$ があって，$U_\varepsilon(x) \subset O$ となることである．Xの開集合の全体を θ で表し，θ は距離関数 $\boldsymbol{d}$ **の位相**を与えるという．θ は次の性質をもっている．

$O1)$ X および空集合 ϕ は θ に属する．

$O2)$ $O_1 \in \theta, O_2 \in \theta \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \theta.$

$O3)$ $O_\lambda \in \theta (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \theta.$

開球 $U_r(x)$ は開集合である．X の部分集合が開集合であるためには，この集合が開球の和集合として表されることが必要十分である．

距離空間 (X, d) の部分集合 F が**閉集合**であるとは，F の補集合が開集合であること，すなわち $F^C \in \theta$ であることをいう．よって X の閉部分集合の全体を $\mathscr{F}$ とすれば，$\mathscr{F}$ は次の性質をもっている．

$F1)$ X および空集合 ϕ は $\mathscr{F}$ に属する．

$F2)$ $F_1 \in \mathscr{F}, F_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}.$

$F3)$ $F_\lambda \in \mathscr{F} (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathscr{F}.$

距離空間 (X, d) において

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

は閉集合である．これを x を中心とする半径 r の**閉球**という．X の部分集合 A に対し，A に含まれる開集合全体の和集合を $\mathrm{int}\,(A)$ で表し，A の**内部**という．$\mathrm{int}\,(A)$ は開集合であり，明らかに A に含まれる最大な開集合である．A の点 x が A の**内点**であるとは，$x \in O \subset A$ となるような開集合 O が存在することである．

X の部分集合 A の補集合の内部を，A の**外部**という．A の外部の点を A の**外点**という．X の部分集合 A の**境界**とは，A の内部および外部を除く X の点全

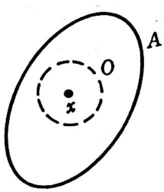


図 2·9

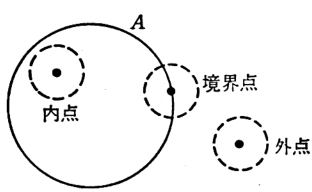


図 2·10

体をいう．これを ∂A で表す．X の真部分集合である閉球 $B_\varepsilon(x)$ の内部は ε-開球 $U_\varepsilon(x)$，外部は $B_\varepsilon(x)$ の補集合であり，境界 $\partial B_\varepsilon(x)$ は球面 $S_\varepsilon(x)$ である．

部分集合 A を含む閉集合全体の共通集合を $\bar{A}$ で表し，A の**閉包**という．$\bar{A}$ は閉集合であり，明らかに A を含む最小の閉集合である．

2·2 距離空間の特徴

自然数の集合 N から距離空間 (X,d) への写像 $f: N \to X$ を X の点列という．$f(n)=x_n(n=1,2,\cdots)$ として，点列を $x_1, x_2, \cdots$ あるいは $\{x_n : n \geqq 1\}$ で表す．点列 $\{x_n\}$ が X の点 a に**収束**するとは，a の任意の開近傍 $U_\varepsilon(a)$ に対し，自然数 n_0 が存在して，$n \geqq n_0$ なるすべてに対し $x_n \in U_\varepsilon(a)$ となることをいう．このとき，点 a は点列 $\{x_n\}$ の**極限点**または**収束点**といい

$$\lim d(x_n, a)=0 \quad \text{または} \quad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

と書く．部分集合 A の点 x が**孤立点**であるとは，点 x を含むある開近傍 $U_\varepsilon(x)$ が存在して $U_\varepsilon(x) \cap A=\{x\}$ となることをいう．

距離空間 (X,d) において，部分集合 A が X で**稠密**であるとは

$$\bar{A}=X$$

が成り立つことをいう．A が X で稠密であるためには，X の任意の開集合 O に対し $O \cap A \neq \phi$ が成り立つことが必要十分である．

X の点列 $\{x_n\}$ が a に収束すれば，任意の $\varepsilon>0$ に対し，自然数 n_0 があって，すべての $n \geqq n_0$ に対し $d(a, x_n)<\varepsilon/2$ となり，任意の $n, m \geqq n_0$ に対し

$$d(x_n, x_m) \leqq d(a, x_n)+d(a, x_m)<\varepsilon$$

すなわち

$$\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m)=0$$

が成り立つ．逆に，X の点列 $\{x_n\}$ が $\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m)=0$ を満たすとき，$\{x_n\}$ は**基本列** または **Cauchy 列**であるという．$\{x_n\}$ が基本列であることは，$\{x_n\}$ が収束列であるための必要条件であるが，十分条件ではない．すべての基本列が収束するとき，距離空間 (X,d) は**完備**であるという．完備距離空間 (X,d) において，基本列であることと，その列が収束することは同値である．

距離空間 (X,d) の部分集合を A とする．d は X の任意の点 x, y に対し与えられているが，$d(x,y)$ を A の点に制限すれば，d は A の距離関数となり，

(A,d) は距離空間となる．これを (X,d) の**部分（距離）空間**という．部分空間 (A,d) において A の部分集合 B が A の開集合であるか，X の開集合であるかを混同してはならない．例えば，$\boldsymbol{R}$ の上で $A=[0,1]$ とし，$A=B$ とすれば，B は $\boldsymbol{R}$ では開集合ではないが，A では全空間であるから開集合である．部分空間 (A,d) の部分集合 B が A の開集合であるためには，X のある開集合 O があって

$$B=O\cap A$$

と表されることが必要十分である．

§3 位 相 空 間

3·1 位　　相

集合 X の部分集合族 θ が与えられ，次の 3 つの条件を満たすものとする．

O1)　X および ϕ は θ に属する．

O2)　$O_1\in\theta, O_2\in\theta \Rightarrow O_1\cap O_2\in\theta$.

O3)　$O_\lambda\in\theta(\lambda\in\Lambda) \Rightarrow \cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\theta$.

このとき θ は X の**位相**を定めるといい，位相の定められた集合 X を**位相空間**という．θ に属する X の部分集合を X の**開集合**という．θ の部分族 θ' が θ の**基底**であるとは，任意の開集合 $O\in\theta$ が θ' に属する集合の和集合

$$O=\cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda' \quad (O_\lambda'\in\theta')$$

として表されるときをいう．

θ_1 と θ_2 は X の位相とし，$\theta_1\subset\theta_2$ であるとき θ_1 は θ_2 より**弱い位相**，または θ_2 は θ_1 より**強い位相**という．$\{\phi, X\}$ は X の最も弱い位相であり，X の部分集合全体の族 θ_3 は O1), O2), O3) を満たす X の最も強い位相である．このような位相を**離散位相**といい，(X,θ_3) を**離散位相空間**という．

位相空間 (X,θ) において，高々可算の基底 θ' が存在するとき，X は**第 2 可算公理**を満たすという．

位相空間 (X,θ) の部分集合 U が点 x の**近傍**であることは

$$x\in O\subset U$$

となる開集合 $O\in\theta$ が存在するときをいう．特に，x を含む任意の開集合は x の近傍である．x を含む開集合を **x の開近傍**という．また x の近傍で，かつ閉集

合であるものを x の**閉近傍**という．x の近傍の全体を x の**近傍系**といい，$u(x)$ で表す．

位相空間 (X, θ) において，X の各点 x の近傍系を $u(x)$ とすれば，$\{u(x)\}_{x \in X}$ は次の性質をもっている．

$U1)$ $U \in u(x) \Rightarrow x \in U$.

$U2)$ $U_1 \in u(x), U_2 \in u(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in u(x)$.

$U3)$ $U_1 \in u(x), U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2 \in u(x)$.

$U4)$ $U \in u(x)$ に対し $V \in u(x)$，$V \subset U$ なる V が存在して，$y \in V$ に対し，$U \in u(y)$ である．

X の点 x の近傍系 $u(x)$ の部分族 $u'(x)$ が x の**近傍の基底**であるとは，任意の $U \in u(x)$ に対し

$$V \subset U$$

となる $V \in u'(x)$ が存在するときをいう．

X の任意の異なる2点 x, y に対し，x の近傍 U と y の近傍 V が存在して

$$U \cap V = \phi$$

となるとき，(X, θ) を **Hausdorff 空間**という．

位相空間が距離づけ可能であるとは，ある距離関数 d を定義して，d から定められる位相がもとの位相と一致するようにできるときをいう．離散位相空間は明らかに距離づけ可能である．距離づけ可能な空間（距離空間）は Hausdorff 空間である．

位相空間 (X, θ) において，A を空でない部分集合とする．このとき X の位相は A に1つの位相を自然に定める．すなわち

$$\theta_A = \{A \cap O : O \in \theta\}$$

とおくと，θ_A は A の部分集合の族で $O1)$，$O2)$，$O3)$ の条件を満たしている．したがって，θ_A は A に1つの位相を定める．この位相を X に関する A の**相対位相**という．相対位相により A は位相空間になる．この位相空間 (A, θ_A) を (X, θ) の**部分空間**という．

3·2 連続写像

位相空間 (X, θ) から位相空間 (Y, θ') への写像 $f : X \to Y$ が X の点 a にお

いて**連続**であるとは，$f(a)$ の任意の近傍を V とするとき，a の適当な近傍 U が存在して

$$f(U)\subset V$$

となるときをいう．この条件は逆像をとって，次のように言い換えることができる．$f(a)$ の任意の近傍 V の f による逆像 $f^{-1}(V)$ が a の近傍となるならば f は a において連続である．X から Y への写像 $f: X\to Y$ が X の各点で連続であるとき，f は**連続写像**であるという．

写像 $f: X\to Y$ において，次は互いに同値である．

(i) f は連続である．

(ii) Y の任意の開集合 V に対し，$f^{-1}(V)$ は X の開集合である．

(iii) X の任意の部分集合 E に対して，$f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$ が成り立つ．

距離空間から距離空間への写像の連続性の条件を点列を用いて述べよう．(X,d)，(Y,d') を距離空間とする．写像 $f: X\to Y$ が $a\in X$ において連続であるためには

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

となる任意の点列 $\{x_n\}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$$

となることが必要十分である．

$f: X\to Y$ が**一様連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta(\varepsilon)=\delta>0$ が存在して

$$d(x,y)<\delta \ \ (x,y\in X) \ \Rightarrow \ d'(f(x),f(y))<\varepsilon$$

を満たすときをいう．

3·3 開写像と同相写像

(X,θ)，(Y,θ') を2つの位相空間とする．写像 $f: X\to Y$ が**開写像**であるとは，X の任意の開集合の像が Y の開集合となることをいう．$f: X\to Y$ が連続かつ単射であって，逆写像 $f^{-1}: f(X)\to X$ も連続であるとき，f を**同相写像**であるという．以後，

同相写像はいつでも全射である場合だけに限定する．

$f: X\to Y$ が全単射で，かつ連続のとき，f が同相写像となるためには，f が

開写像となることが必要十分である．$f: X \to Y$ が全単射で連続であっても必ずしも f は同相写像ではない．例えば，$\boldsymbol{R}$ に離散位相およびユークリッドの距離関数をそれぞれ与えた空間を X, Y とすれば，恒等写像 $id: X \to Y$ は全単射で連続であるが同相ではない．しかし，位相空間 (X, θ) の上の恒等写像 $id: X \to X$ は同相写像である．

同相写像によって保たれる性質を**位相的性質**という．2つの位相空間 (X, θ) と (Y, θ') において，同相写像 $f: X \to Y$ は θ から θ' への全単射を引き起こすということで特徴づけられる．したがって閉集合，閉包，内部，外部および近傍等の概念の性質は，いずれも開集合族のみで規定されるから位相的性質である．

3·4 直積空間

位相空間の族 $\{(X_\lambda, \theta_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられたとき，それらの直積集合 $X = \times_\lambda X_\lambda$ の中に次のように位相を定義する．A_λ を X_λ の開集合とし，$\times_\lambda A_\lambda$ の形の集合で，λ の有限個を除いて $A_\lambda = X_\lambda$ となるもの，すなわち

$$O = (\times_{j \in J} A_j) \times (\times_{\lambda \notin J} X_\lambda) \quad (J \text{ は } \Lambda \text{ の有限集合})$$

このような集合を X の**開筒集合**という．$X = \times_\lambda X_\lambda$ の開集合は開筒集合の任意個の和集合と定義すれば，このような開集合全体は X に位相を定める．このようにして直積集合 X に位相が導入されたとき，X を**直積位相空間**という．直積位相空間 $X = \times_\lambda X_\lambda$ の直積位相は，射影 $P_\lambda: X \to X_\lambda$ が連続となる位相のうち最も弱い位相である．また，この射影 P_λ は開写像である．各位相空間 $(X_\lambda, \theta_\lambda)$ が，Hausdorff 空間ならば，直積位相空間 $X = \times_\lambda X_\lambda$ は Hausdorff 空間である．

3·5 連結空間

位相空間 (X, θ) が空でない2つの開集合 O_1, O_2 の和集合として

$$X = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \phi$$

と表されるとき，O_1, O_2 を X の**分割**といい，X は**不連結**であるという．X が分割できないとき，X は**連結**であるという．X が連結であるとは，閉かつ開となる部分集合が X および ϕ 以外に存在しないことであるといってよい．X の部分集合 A が**連結集合**であるとは，A が部分空間として，連結であるときをいう．連結な部分集合列 $\{A_i\}$ が $\cap_i A_i \neq \phi$ を満たしているならば，その和集合

$A=\bigcup_i A_i$ は連結である．$\boldsymbol{R}$ の部分集合 I が特に区間であれば，それは連結である．実際に，I は連結でないとすると，$A\cap B=\phi$ を満たす空でない開集合 A, B が存在して，$I=A\cup B$ とできる．A から点 x を，B から点 z を選べは，明らかに $x\neq z$ である．いま $x<z$ とする．I は区間であるから，$[x, z]\subset I$．よって $[x, z]$ の点は A か B に属する．さて

$$y=\sup\{[x, z]\cap A\}$$

とすると，明らかに $x\leqq y\leqq z$ である．だから $y\in I$．$A(=B^C)$ は I の中で閉集合であるから，y の定義から $y\in A$ が求まる．ゆえに $y<z$ である．$y+\varepsilon<z$ を満たす $\varepsilon>0$ に対し，y の定義によって，$y+\varepsilon\in B$ でなくてはならない．$B(=A^C)$ は I の中で閉集合であるから，$y\in B$ が求まる．ところが $y\in A\cap B=\phi$ となって矛盾が起こる．よって I は連結である．

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 A が連結であれば，A は区間である．実際に，A は区間でないと仮定すると，2点 x, z は A に属し，y は A に属さないで，$x<y<z$ を満たすものが存在する．このとき

$$A=[A\cap(-\infty, y)]\cup[A\cap(y, +\infty)]$$

が成り立つ．よって A は連結ではない．これは矛盾である．

連結空間の上の連続写像による像は連結である．よって連結空間から $\boldsymbol{R}$ への連続像は区間である．

X が不連結であるためには，X から $\{0, 1\}$ の上への連続写像が存在することが必要十分である．

位相空間(X, θ)の点xを含む連結集合全体の和集合はxを含む最大の連結集合である．これを点xを含む X の**連結成分**という．$\boldsymbol{R}$ の中の有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ は部分空間としてその各点の連結成分はただ1点である．このような部分空間を**完全不連結**という．離散距離空間は完全不連結である．

区間 $I=[0, 1]$ を3等分し，$(1/3, 2/3)$ を除く．

$$I_1=[0,\ 1]\setminus\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)=\left[0,\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$$

I_1 の2つの区間をそれぞれ3等分し，中央の1/3の開区間を除く．

$$I_2=\left[0,\ \frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$

このようにして一般に I_{n-1} の各閉区間を3等分し，中央の1/3の開区間を各閉区間から除き，長さが $1/3^n$ の 2^n 個の閉区間の和集合を I_n とする．この操作を続けて得られる集合 I_n の共通集合

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

を **Cantor 集合**という．I に属する実数 x を3進小数で

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots$$

と表すとき，$a_1, a_2. \cdots$ が0または2だけで表せる x の全体が Cantor 集合である．Cantor 集合 C は I の中で閉集合で，$\boldsymbol{R}$ の部分距離空間 C として孤立点をもたない完全不連結空間である．

3·6 コンパクト空間

集合 X の部分集合 E_λ からなる集合族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\cup_\lambda E_\lambda=X$ を満たすとき $\{E_\lambda\}$ を X の**被覆**という．特に，Λ が有限のとき，$\{E_\lambda\}$ を X の**有限被覆**という．集合族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の任意の有限個 $E_{\lambda_1},\cdots,E_{\lambda_n}$ に対し，$\cap_{i=1}{}^n E_{\lambda_i}\neq\phi$ となるとき，$\{E_\lambda\}$ は**有限交叉性**をもつという．位相空間 (X,θ) が**コンパクト**であるとは，次の条件をもつ位相空間をいう．

（A） $X=\cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ を X の任意の開集合から成る被覆（開被覆）とすれば，適当な有限個の $O_{\lambda_1},\cdots,O_{\lambda_n}$ をとりだし，$X=\cup_{i=1}{}^n O_{\lambda_i}$ となるようにできる．

条件（A）は次と同値である．

（A′） X の閉集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性をもつならば，$\cap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\phi$ となる．

部分集合 A がコンパクトであるとは，A が相対位相に関してコンパクトであるときをいう．

直積位相空間 $X=\times_\lambda X_\lambda$ において，各 X_λ がコンパクト空間ならば，X もコンパクト空間である．距離空間 (X,d) がコンパクトであるためには，X の任意の点列 $\{x_n\}_{n\in N}$ に必ず収束する部分列が含まれることが必要十分である．明らかにコンパクト距離空間は完備である．

位相空間が Hausdorff 空間である場合，次が成り立つ．

（i） コンパクト集合は閉集合である．

（ii） コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトである．

（iii） コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである．

（iv） コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉集合を閉集合に写す．

（v） コンパクト空間の点 x の連結成分は，それを含むすべての開かつ閉集合の共通部分に等しい．

k を自然数とし，Y_k を有限集合

$$Y_k=\{0, 1, \cdots, k-1\}$$

とする．Y_k の上に $d_1(x, y)=1$ $(x\neq y)$, $d_1(x, y)=0$, $(x=y)$ によって距離関数 d_1 を定義する．(Y_k, d_1) は離散距離空間で，明らかに Y_k はコンパクトである．$i\in \boldsymbol{Z}$ に対し，$Y_{k,i}$ は Y_k のコピー $(Y_{k,i}=Y_k)$ とし，無限直積空間

$$\mathop{\times}_{i=-\infty}^{\infty} Y_{k,i}=\{(x_i)\,;\, x_i\in Y_k, -\infty<i<\infty\}$$

を $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ で表す．2点 $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ に対し

$$d(x, y)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} d_1(x_i, y_i)/2^{|i|}$$

は $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の上の距離関数となり，$(Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}, d)$ はコンパクトかつ $k\geqq 2$ ならば孤立点をもたない完全不連結距離空間である．さて，$Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の上に写像 $\sigma: Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}\to Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ を $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ に対して

$$\sigma(x_n)=(y_n), \quad y_n=x_{n+1} \quad (n\in \boldsymbol{Z})$$

によって定義する．写像 σ は連続な全単射である．$Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ はコンパクトであるから，逆写像 σ^{-1} は連続である．よって σ は同相写像である．このような同相写像を**推移写像**という．

次の定理は後で，しばしば使われるので証明を与えておこう．

Lebesgue 被覆定理 (X, d) はコンパクト距離空間で，X の有限開被覆 α が与えられているとする．このとき実数 $\delta(\alpha)=\delta>0$ が存在して，任意の部分集合 A の直径が δ 以下 $(\mathrm{diam}(A)=\sup\{d(a, b): a, b\in A\}<\delta)$ であれば，$A\subset B$ なる $B\in\alpha$ が存在する．$\delta>0$ を有限開被覆 α に対する **Lebesgue 数**という．

証明 命題を否定すると，任意の $n>0$ に対し，$\mathrm{diam}\,(A_n)\leqq 1/n$ かつすべて

の $B\in\alpha$ に対し $A_n\not\subset B$ なる部分集合 A_n が存在する．各 A_n から1点 x_n を選ぶとき，X はコンパクトであるから $\{x_n\}$ の中に収束する部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在する．$x_{n_i}\to x(i\to\infty)$ とすると，$B\in\alpha$ が存在して，$x\in B$ とできる．$X\setminus B$ はコンパクトであるから，$a=d(x, X\setminus B)>0$．このとき $n_i>2/a$，$d(x_{n_i}, x)<a/2$ を満たすように十分大きな n_i を選ぶと，任意の $y\in A_{n_i}$ に対し

$$d(y, x)\leqslant d(y, x_{n_i})+d(x_{n_i}, x)\leqslant 1/n_i+a/2<a.$$

よって $y\in B$．y は A_{n_i} の中で任意であるから，$A_{n_i}\subset B$ となって矛盾を得る．

上の定理から，コンパクト距離空間 (X, d_1) から，距離空間 (Y, d_2) への連続写像 f は一様連続であることが示される．実際に，X はコンパクトであるから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，X の有限開被覆 $\{f^{-1}(U_{\varepsilon/2}(y_i)) : y_i\in Y, 1\leqslant i\leqslant n\}$ が存在する．このとき，$\delta>0$ をその開被覆の Lebesgue 数とすれば，$d_1(x, x')<\delta$ なる集合 $\{x, x'\}$ は，ある開集合 $f^{-1}(U_{\varepsilon/2}(y_i))$ に含まれる．よって $d_2(f(x), f(x'))<\varepsilon$ である．

3·7　コンパクト Hausdorff 空間

コンパクト Hausdorff 空間 X から $\boldsymbol{R}$ への連続関数 ξ は X の上で最大値と最小値をとる．連続関数の全体を $C(X)$ で表し，$\xi, \eta\in C(X)$ に対し，ξ と η の和を $(\xi+\eta)(x)=\xi(x)+\eta(x)$ で定め，ξ の $\alpha(\in\boldsymbol{R})$ 倍を $(\alpha\xi)(x)=\alpha\xi(x)$ で定めると $C(X)$ は1つのベクトル空間になる．$\xi\in C(X)$ に対し

$$\|\xi\|=\max\{|\xi(x)| : x\in X\}$$

は $C(X)$ のノルムと呼ばれ，次の性質をもっている．

$n1)$　$\|\xi\|\geqslant 0$ であって，特に $\|\xi\|=0 \Leftrightarrow \xi(x)=0 \quad (x\in X)$.

$n2)$　$\|\alpha\xi\|=|\alpha|\,\|\xi\|$.

$n3)$　$\|\xi+\eta\|\leqq\|\xi\|+\|\eta\|$.

条件 $n1)$，$n2)$，$n3)$ を満たす $\|\cdot\|$ をもつベクトル空間を**ノルム空間**という．

ノルムから $d(\xi, \eta)=\|\xi-\eta\|$ $(\xi, \eta\in C(X))$ によって距離関数 d が定義される．このとき距離空間 $(C(X), d)$ は完備である．一般に完備なノルム空間を **Banach 空間**という．したがって $C(X)$ は Banach 空間である．

コンパクト Hausdorff 空間 (X, θ) において，次は同値である．

(1)　X は距離づけ可能である．

（2） X は可算基底をもつ.

（3） Banach 空間 $C(X)$ に可算集合が存在して，それは $C(X)$ で稠密である.

n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$\|x\|=\{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\}^{1/2}$$

とおくと，$\|\cdot\|$ は $\boldsymbol{R}^n$ のノルムをなす. このようなノルムを $\boldsymbol{R}^n$ の上の**通常のノルム**という.

集合 X の部分集合族 $\mathscr{R}$ を含むもっとも弱い位相は次のようにして定義される. $\mathscr{R}$から有限個をとり出して，それの共通部分をあらゆる仕方でつくり，それを $\mathscr{R}_1$ とする. このとき $\mathscr{R}\subset\mathscr{R}_1$ である. さらに $\mathscr{R}_1$ から任意個の集合をとり出し，それの和集合をあらゆる仕方でつくり，それを $\mathscr{R}_2$ とする. $\mathscr{R}_2$ に X と空集合 ϕ をつけ加えて得た族を θ とすると，θ は $O1$), $O2$), $O3$) を満たす. この位相 θ を $\mathscr{R}$ によって**生成された X の位相**という.

最後に次の事実を述べておこう。θ' は $\boldsymbol{R}$ のユークリッド距離関数から導入された位相とする. コンパクト位相空間 (X, θ) において，開集合族 $\cup\{\xi^{-1}(\theta'): \xi\in C(X)\}$ によって生成された位相は X の位相 θ と一致する.

第3章　軌道の性質

この章では，主としてコンパクト距離空間の上の同相写像の力学的性質として，極小性，位相推移性デイスタル性，拡大性について解説する．

§4では極小集合とその存在定理を述べる．§5では位相推移的な同相写像とその特徴づけ，推移写像の位相推移性，位相推移的な等長写像の極小性等を解説する．§6ではデイスタル，一様概周期性，概周期点等を定義し，一様概周期的ならばデイスタルであること，デイスタルな同相写像に対して各点は概周期的であり，各軌道の閉包は極小集合であること等を示す．

§7では拡大的同相写像の生成系および弱生成系による特徴づけ，極限集合との関係，推移写像と拡大性，拡大的同相写像と推移写像との関係等について述べる．§8では拡大的な同相写像が存在するようなコンパクト距離空間は有限次元であることを証明する．

§4　極　小　性

コンパクト距離空間 (X, d) の同相写像 f が**極小的**であるとは，任意の点 $x \in X$ の f による軌道 $O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \boldsymbol{Z}\}$ が X で稠密であることをいう．

定理 4·1　f が極小的であるための必要十分条件は閉部分集合 E が $f(E) = E$ を満たすとき，$E = \phi$ であるか，あるいは $E = X$ であることである．

証明　f は極小的であって，閉部分集合 $E \neq \phi$ が $f(E) = E$ を満たせば，$x \in E$ に対し $O_f(x) \subset E$ である．$O_f(x)$ は X で稠密であるから，$E = X$ を得る．

逆に，任意の $x \in X$ に対し，f の軌道 $O_f(x)$ は空でない．よって $\overline{O_f(x)} = X$ である．すなわち f は極小的である．

注意 4·1　f が極小的であれば，任意の $x \in X$ に対し，f の半軌道 $O_f^+(x) = \{f^n(x) : n \geqq 0\}$ は X で稠密である．

証明　$f(O_f^+(x)) \subset O_f^+(x)$ より，$f(\overline{O_f^+(x)}) \subset \overline{O_f^+(x)}$ が成り立つ．X はコンパクトであるから

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(\overline{O_f^+(x)}) = B$$

は空でない．$f(B)=B$ から定理 4·1 によって $B=X$ を得る．よって $O_f^+(x)$ は X で稠密である．

コンパクト距離空間 (X, d) の閉部分集合 E は $f(E)=E$ を満たし，E への f の制限 $f_{|E}: E \to E$ が極小的であるとき，E を**極小集合**であるという．

集合 $\mathscr{D}$ において定義された**順序関係** $\leqslant$ **とは，**$\mathscr{D}$ の点と点との間の関係で

(i)　すべての $a \in \mathscr{D}$ に対して，$a \leqslant a$

(ii)　$a \leqslant b$ で $b \leqslant a \Rightarrow a=b$

(iii)　$a \leqslant b$ で $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$

が成り立つものをいう．順序関係の定められた集合を**順序集合**という．順序集合 $(\mathscr{D}, \leqslant)$ において，ある $a_0 \in \mathscr{D}$ があってすべての $a \in \mathscr{D}$ に対し，$a \leqslant a_0$ であるとき，a_0 を $\mathscr{D}$ の**最大元**という． もしすべての $a \in \mathscr{D}$ に対して $a_0 \leqslant a$ であるとき，a_0 を $\mathscr{D}$ の**最小元** という．

また，ある $b_0 \in \mathscr{D}$ が，いかなる $a \in \mathscr{D} (a \neq b_0)$ に対しても $b_0 \leqslant a$ とならないとき，b_0 を $\mathscr{D}$ の 1 つの**極大元**という．いかなる $a (\neq b_0)$ に対しても $a \leqslant b_0$ とならないとき，b_0 を $\mathscr{D}$ の 1 つの**極小元**という．

$\mathscr{D}$ の最大元（最小元）が存在すればただ 1 つである．しかし $\mathscr{D}$ の極大元（極小元）は多数存在することもある．

順序集合 $(\mathscr{D}, \leqslant)$ の部分集合 $\mathscr{L}$ に対して，すべての $a \in \mathscr{L}$ が $a \leqslant x$ であるような，x を $\mathscr{L}$ の 1 つの**上界**という．すべての $a \in \mathscr{L}$ が $x \leqslant a$ のとき，x を $\mathscr{L}$ の 1 つの**下界**という．$\mathscr{L}$ が少なくとも 1 つの上界（下界）をもち，$\mathscr{L}$ の上界（下界）全体の集合に最小元（最大元）a_0 が存在するとき，a_0 を $\mathscr{L}$ の**上端**（**下端**）といって

$$a_0 = \sup \mathscr{L} \quad (a_0 = \inf \mathscr{L})$$

で表す．

順序集合 $(\mathscr{D}, \leqslant)$ において，任意の $a, b \in \mathscr{D}$ に対し，$a \leqslant b$ または $b \leqslant a$ の少なくとも一方が成り立つとき，$(\mathscr{D}, \leqslant)$ を**線形順序集合**という．順序集合 $(\mathscr{D}, \leqslant)$ が**帰納的**であるとは，$\mathscr{D}$ の部分集合 $\mathscr{L}$ で，$\mathscr{D}$ の順序に関して $\mathscr{L}$ が線形順序集合であれば，必ず $\mathscr{D}$ の中に $\inf \mathscr{L}$ が存在するときをいう．

Zorn の補題 4.1 順序集合 $(\mathscr{D}, \leqslant)$ が帰納的であれば，$\mathscr{D}$ は必ず少なくとも1つの極小元をもつ．

定理 4·2 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像は極小集合をもつ．

証明 Xの空でない f-不変な閉集合 $(f(E)=E)$ の全体を $\mathscr{D}$ とする．X は f-不変な閉集合であるから，$X\in\mathscr{D}$．よって$\mathscr{D}\neq\phi$ である．$A, B\in\mathscr{D}$ に対し，$A\subset B$ のとき $A\leqslant B$ とする．このとき，$(\mathscr{D}, \leqslant)$ は順序集合である．$\mathscr{D}$ に含まれる任意の線形順序集合 $\mathscr{L}$ に対し

$$E'=\bigcap_{E\in\mathscr{L}} E$$

は空でない f-不変な閉集合である．$E'\neq\phi$ はXがコンパクトであることからわかる．よって $E'\in\mathscr{D}$ である．だから $(\mathscr{D}, \leqslant)$ は帰納的である．ゆえに Zorn の補題が適用できて，$\mathscr{D}$ は極小元をもつ．この極小元が f の極小集合である．

点 $x\in X$ がある自然数 n に対し，$f^n(x)=x$ を満たすとき x は f の**周期点**といい，$f^n(x)=x$ なる最小の n を x の**周期**という．

定理 4·3 f が極小的であるとする．このとき

（1） 連続関数 $\xi\in C(X)$ に対し，点 $x\in X$ で $\xi(f(x))=\xi(x)$ を満たすならば，ξ は X の上で定数値関数である．

（2） 空間 X が有限集合でなければ，f は周期点をもたない．

証明 （1）の証明：f は極小的であるから，各 $x\in X$ に対し，$\overline{O_f(x)}=X$ である．よって，任意の $y\in X$ は $O_f(x)$ の部分列 $\{f^{n_j}(x)\}$ によって近似される．すなわち $f^{n_j}(x)\to y\,(j\to\infty)$ である．ゆえに $\xi(y)=\xi(x)\,(y\in X)$ が得られる．

（2）の証明：f が周期点 $x\in X$ をもつとする．x の周期を $n>0$ とすれば $\{x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$ は f-不変閉集合である．f は極小的であるから，X は有限集合となって矛盾を得る．

注意 4·2 （1） 恒等写像 $id: X\to X$ が極小的であるための必要十分条件は X が1点集合である．

（2） $Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ の上の推移写像 σ が極小的であるための必要十分条件は，$k=1$ である．

§5 位相推移性

位相空間の部分集合 A が**疎集合**であるとは，A の閉包 $\bar{A}$ が内点をもたないときをいう．高々可算個の疎集合の和集合を**第1類集合**という．

コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f の軌道 $O_f(x_0)$ が X で稠密となる点 $x_0 \in X$ が存在すれば，f は**位相推移的**であるという．f が極小的であれば，f は位相推移的である．

定理 5·1 f はコンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像とする．このとき次は互いに同値である．

（1） f は位相推移的である．

（2） 閉部分集合 $E \underset{\neq}{\subset} X$ が $f(E)=E$ を満たせば，E の補集合 E^c は X で稠密である．

（3） 任意の開集合 $U \neq \phi$，$V \neq \phi$ に対し，$f^n(U) \cap V \neq \phi$ を満たす整数 $n \in \boldsymbol{Z}$ が存在する．

（4） 集合 $\{x \in X : \overline{O_f(x)} \neq X\}$ は第1類集合である．

証明 （1）⇒（2）の証明：$\phi \neq E = f(E) \underset{\neq}{\subset} X$ なる閉部分集合 E が開集合 $U \neq \phi$ を含むとする．f は位相推移的であるから，点 $x_0 \in X$ が存在して $\overline{O_f(x_0)} = X$ とできる．よって

$$f^k(x_0) \in U \subset E$$

なる $k \in \boldsymbol{Z}$ が存在して，$O_f(x_0) \subset E$ が成り立つ．ゆえに $\overline{O_f(x_0)} \underset{\neq}{\subset} X$ となって矛盾を得る．ゆえに E は内点をもたないから，E^c は X で稠密である．

（2）⇒（3）の証明：$U \neq \phi$，$V \neq \phi$ を開集合とする．$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U)$ は f-不変開集合であるから，（2）より

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U) \cap V \neq \phi$$

を得る．

（3）⇒（4）と（4）⇒（1）の証明の前に次を準備しよう．

補題 5·1 (Baire の定理), (X, d) を完備距離空間, $F_n(n=1,2,\cdots)$ を X の閉集合列とし, $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とする. このとき, 各 F_n が内点をもたないならば E の補集合は X で稠密である. したがって $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ならば, 少なくとも1つの閉集合 F_n は内点をもつ.

証明　Xの部分集合 $\overline{E^c}$ に属さない点 x_0 があるとすると, 点 x_0 の開近傍 $U_{\varepsilon_0}(x)=\{x\in X: d(x, x_0)<\varepsilon_0\}$ が E^c と共通部分をもたないように $\varepsilon_0>0$ を選ぶことができる. よって

$$U_{\varepsilon_0}(x_0)\subset E$$

である. F_1 は内点をもたない閉集合だから

$$U_{\varepsilon_0}(x_0)\cap F_1{}^c\neq\phi$$

である. だから

$$\overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)}\subset U_{\varepsilon_0}(x_0)\cap F_1{}^c$$

なる点 x_1 と $0<\varepsilon_1<1$ なる ε_1 が存在する. 同様にして

$$\overline{U_{\varepsilon_2}(x_2)}\subset U_{\varepsilon_1}(x_1)\cap F_2{}^c$$

なる点 x_2 と $0<\varepsilon_2<1/2$ なる ε_2 が存在する. 以下同様にして, 点列 $\{x_n\}$ と正数列 $\{\varepsilon_n\}$ とを

$$\overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)}\subset U_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})\cap F_n{}^c,\ 0<\varepsilon_n<1/n$$

なるように定めることができる. このとき $n>m$ ならば $x_n\in U_{\varepsilon_m}(x_m)$. すなわち

$$d(x_n, x_m)<\varepsilon_m<1/m.$$

だから, $\{x_n\}$ は基本列をなし, X の完備性により

$$d(x_n, x)\to 0\quad (n\to\infty)$$

なる点 $x\in X$ が存在する. よって任意の m に対し

$$d(x, x_m)\leqslant d(x, x_n)+d(x_n, x_m)\leqslant d(x, x_n)+\varepsilon_m\quad (n>m\text{のとき})$$

$n\to\infty$ として $d(x, x_m)\leqslant\varepsilon_m$ を得る. すなわち $x\in\overline{U_{\varepsilon_m}(x_m)}$. よって $x\notin F_m$ となり, m は任意であったから

$$x\notin\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m=E$$

である. しかし, 上の議論から

$$x\in\overline{U_{\varepsilon_m}(x_m)}\subset U_{\varepsilon_0}(x_0)\subset E$$

となって矛盾を得る．

補題の後半は前半の対偶からわかる．すなわち $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n{}^c=\phi$ だから，前半の対偶により，少なくとも1つの F_n が内点をもつことになる．

補題 5·2 完備距離空間は第1類集合ではない．

証明 補題5·1より明らかである．

完備距離空間 (X,d) の稠密な開集合の可算列 $D_n(n\geqq 0)$ に対して，$R=\bigcap_{n=0}^{\infty}D_n$ を **Baire 集合**という．補題5·1によって，R は Xで稠密である．

(3)⇒(4) の証明: $\{U_1,U_2,\cdots\}$ はXの位相の可算基底とする．仮定(3)によって各 i に対し，$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}f^n(U_i)$ はXで稠密であるから，$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}f^n(X\setminus U_i)$ は内点をもたない閉集合である．さらに

$\overline{O_f(x)}\neq X$ ⇔ $\overline{O_f(x)}\cap U_n=\phi$ なる $n\geqq 1$ が存在する

⇔ すべての $m\in\boldsymbol{Z}$ に対して $f^m(x)\in X\setminus U_n$ なる $n\geqq 1$ が存在する．

⇔ $x\in\bigcap_{m=-\infty}^{\infty}f^m(X\setminus U_n)$ なる $n\geqq 1$ が存在する

⇔ $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=-\infty}^{\infty}f^m(X\setminus U_n)$

であるから，集合

$$\{x\in X:\ \overline{O_f(x)}\neq X\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=-\infty}^{\infty}f^m(X\setminus U_n)$$

は第1類である．

(4)⇒(1) の証明: コンパクト距離空間は完備であるから，補題5·2より結論を得る．

定理 5·2 コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が位相推移的であれば，すべての $x\in X$ に対し $\xi(f(x))=\xi(x)$ を満たす連続関数 ξ は定数値関数である．

証明　点 $x_0\in X$ が存在して $\overline{O_f(x_0)}=X$ が成り立ち，すべての $n\in \boldsymbol{Z}$ に対し $\xi(f^n(x_0))=\xi(x_0)$ である．よって，ξ は定数値関数である．

注意 5·1　コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像を f とする．すべての $x\in X$ に対し，$\xi(f(x))=\xi(x)$ を満たすすべての連続関数は定数値関数であると仮定する．このとき，f は位相推移的であろうか．この問題は否定的である例を与えよう．その前に簡単な準備をする．

$\boldsymbol{R}^k$ の2点 $x=(x_1,\cdots,x_k)$，$y=(y_1,\cdots,y_k)$ と実数 α に対し，x と y との和 $x+y$, x の α 倍 αx を

$$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_k+y_k),\quad \alpha x=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_k)$$

によって定義する．このとき，それらの演算に関して $\boldsymbol{R}^k$ はベクトル空間になる．

$\boldsymbol{R}^k$ の上に Euclid の距離関数 d を定義する．このとき距離空間 $(\boldsymbol{R}^k,d)$ は完備であることが容易にわかる．

集合 G が**群**であるとは，その任意の2点 x,y に対し，第3の点 $x\cdot y$ が定まり，これについて次の公理を満たしているときをいう．

（1）　$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$　$(x,y,z\in G)$．

（2）　G に単位元とよばれる特定の元 e が存在して

$$x\cdot e=e\cdot x=x\quad (x\in G)$$

が成り立つ．

（3）　G の各元 x に対し

$$x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=e$$

を満たす元 x^{-1} が存在する（この x^{-1} を x の**逆元**という）．

特に，群 G のすべての元 x,y に対し，$x\cdot y=y\cdot x$ を満たすとき G は**可換**であるという．

群 G が Hausdorff 空間であって，G の2点の積 $x\cdot y$ は x,y の関数として連続となり，x^{-1} は x の関数として連続となるとき，G は**位相群**であるという．H は G の閉集合で，すべての $x,y\in H$ に対し，$x\cdot y^{-1}\in H$ を満たすならば，H は G の**部分群**であるという．

k 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^k$ は加法に関して可換位相群である．$\boldsymbol{Z}^k$ は $\boldsymbol{R}^k$ の整数

だけからなるベクトルの全体とする．このとき $\boldsymbol{Z}^k$ は閉集合で $\boldsymbol{R}^k$ の部分群である．

$\boldsymbol{R}^k$ の2点 x, y に対し，$x-y\in\boldsymbol{Z}^k$ であるとき，$x\sim y$ と表すことにすると，記号～は同値関係を満たす．この同値関係によって $\boldsymbol{R}^k$ を類別した集合を $\boldsymbol{R}^k/\boldsymbol{Z}^k$ で表し，$\boldsymbol{R}^k$ の $\boldsymbol{Z}^k$ による**剰余群**であるという．$\boldsymbol{R}^k$ の点 x に $\boldsymbol{R}^k/\boldsymbol{Z}^k$ の点 $x+\boldsymbol{Z}^k$ を対応させる写像 $\pi: x\to x+\boldsymbol{Z}^k$ が連続になる最強の位相を $\boldsymbol{R}^k/\boldsymbol{Z}^k$ に導入する．この位相は次によって定義した距離関数 d_1 による位相と一致する．

$$d_1(x+\boldsymbol{Z}^k, y+\boldsymbol{Z}^k)=\inf\{d(x+a, y+b): a, b\in\boldsymbol{Z}^k\}$$

よって $\boldsymbol{R}^k/\boldsymbol{Z}^k$ は距離空間で，それはコンパクトである．このようにして距離関数 d_1 が導入されたコンパクト位相可換群 $\boldsymbol{R}^k/\boldsymbol{Z}^k$ を k 次元**トーラス**といい，これを T^k で表す．

$k\times k$ 行列 $A=(a_{ij})$ の成分 a_{ij} は整数であって，その行列式 $\det A$ は ±1 であるとする．このとき逆行列の成分は整数である．よって，$A(\boldsymbol{Z}^k)=\boldsymbol{Z}^k$ が成り立つ．行列 A によって $\boldsymbol{R}^k$ の上に線形写像 $f_A(x)=Ax\ (x\in\boldsymbol{R}^k)$ を定義する（ここに Ax は行列 A と $1\times n$ 行列 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ の転置行列の積を表す）．f_A から T^k の上に写像

$$f(x+\boldsymbol{Z}^k)=f_A(x)+\boldsymbol{Z}^k \quad (x\in\boldsymbol{R}^k)$$

を定義する．このとき，$f: T^k\to T^k$ は同相写像で $f(x+y+\boldsymbol{Z}^k)=f(x+\boldsymbol{Z}^k)+f(y+\boldsymbol{Z}^k)\ (x, y\in\boldsymbol{R}^k)$ を満たす．このような f を A によって引き起こされた T^k の上の**自己同型写像**という．f_A と f との間には，$\pi\circ f_A=f\circ\pi$ が成り立つ．すなわち，次の図式が可換である．

2次元トーラス T^2 の上に位相推移的自己同形写像 f が存在する（証明については§24の注意24・5を参照）この f を使って上で述べた例を構成しよう．

T^2 の単位元を e で表すことにしよう．T^2 と同相な位相空間 $T^2\times\{0\}$ と $T^2\times\{1\}$ の和集合 $T^2\times\{0\}\cup T^2\times\{1\}$ において，2点$(e, 0), (e, 1)$ を同一視した位相空間を

$$X=T^2\times\{0\}\cup T^2\times\{1\}/(e, 0)\sim(e, 1)$$

で表す．

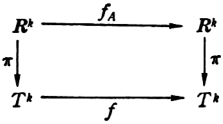


図 3・1

X の上に $h(x, 0)=(f(x), 0)$，$h(x, 1)=(f(x), 1)$ によって，同相写像を定義すると

$$h(T^2\times\{0\})=T^2\times\{0\},$$
$$h(T^2\times\{1\})=T^2\times\{1\}$$

が成り立つ．よって，$h: X\to X$ は位相推移的でない．連続関数 ξ は $\xi(h(x))=\xi(x)$ $(x\in X)$ を満たしているとする．f は T^2 の上で位相推移的であるから，点 $t_0\in T^2$ が存在して $\overline{O_f(t_0)}=T^2$ である．

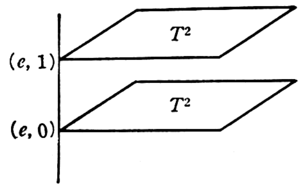


図 3·2

$$\xi(h(t_0, 0))=\xi(t_0, 0),\qquad \xi(h(t_0, 1))=\xi(t_0, 1)$$

であるから，任意の $t\in T^2$ に対し

$$\xi(t, 0)=\xi(t_0, 0),\qquad \xi(t, 1)=\xi(t_0, 1).$$

$t=e$ のとき，$(e, 0)\equiv(e, 1)$ であるから，$\xi(t_0, 0)=\xi(t_0, 1)$ が成り立つ．よって，ξ はすべての点 $x\in X$ で $\xi(t_0, 0)$ に等しい．

注意 5·2 (1) $id: X\to X$ が位相推移的であるための必要十分条件は，X が1点からなる集合に限ることである．

(2) $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の上の推移写像 σ は位相推移的である．

証明 $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ は離散距離空間 Y_k の無限直積空間であるから，任意の $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の空でない開集合は有限個を除いて Y_k の無限直積の集合

$$\cdots\times Y_{k,-p}\times\{x_{-p+1}\}\times\cdots\times\{x_q\}\times Y_{k,q+1}\times\cdots$$

を含むことに注意する．このとき，$Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の空でない開集合 U, V に対し，$\sigma^n(U)\cap V\neq\phi$ を満たす $n\in\boldsymbol{Z}$ の存在が示される．

距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が**等長的**であるとは，任意の $x, y\in X$ に対し

$$d(f(x), f(y))=d(x, y)$$

を満たすことである．

定理 5·3 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が位相推移的であるとする．このとき，f が等長的であれば f は極小的である．

証明 仮定によって $\overline{O_f(x_0)}=X$ なる点 $x_0\in X$ が存在する．任意の $x\in X$ に対し，$\overline{O_f(x)}=X$ を示せばよい．$x\in X$ を固定して，任意の $y\in X$ と任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$d(x, f^n(x_0))<\varepsilon, \qquad d(y, f^m(x_0))<\varepsilon$$

を満たす $n, m\in \boldsymbol{Z}$ が存在する．よって

$$\begin{aligned} d(y, f^{n-m}(x)) &\leqq d(y, f^n(x_0))+d(f^n(x_0),\ f^{n-m}(x)) \\ &=d(y, f^n(x_0))+d(f^m(x_0), x)<2\varepsilon \end{aligned}$$

ε は任意であるから，$O_f(x)$ は X で稠密である．

§6 ディスタル

(X, d) をコンパクト距離空間，$f: X\to X$ を同相写像とする．f が**ディスタル**であるとは，$x, y\in X$ に対し

$$\inf\{d(f^n(x), f^n(y)): n\in \boldsymbol{Z}\}=0 \Rightarrow x=y$$

を満たすときをいう．等長写像はディスタルであるが，逆は一般に成り立たない．例えば，2次元トーラス T^2 の上に写像 f を

$$f(x, y)=\left(\frac{1}{4}+x, 2x+y\right) \quad ((x, y)\in T^2)$$

によって定義する．このとき $f: T^2\to T^2$ はディスタルであるが等長的ではないことが容易に確かめられる．

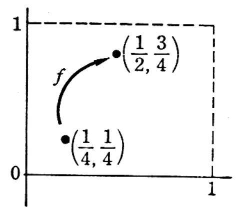


図 3·3

整数全体からなる加法群 $\boldsymbol{Z}$ の部分集合 A が **Poincaré 周期集合**であるとは，有限部分集合 $K\subset \boldsymbol{Z}$ が存在して $\boldsymbol{Z}=A+K(=\{a+k: a\in A, k\in K\})$ とできることである．同相写像 $f: X\to X$ が**一様概周期的**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し Poincaré 周期集合 A が存在し，すべての $x\in X$ とすべての $n\in A$ に対し

$$f^n(x)\in U_\varepsilon(x)$$

を満たすときをいう．

定理 6·1 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が一様概周期的であれば，f はディスタルである．

まず補題を準備しよう．κ はコンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像の族とする．κ が**同程度連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ があって

$$d(x, y)<\delta \quad \Rightarrow \quad \text{すべての } f\in\kappa \text{ に対し，} d(f(x), f(y))<\varepsilon$$

を満たすことである．

補題 6・1 f が一様概周期的ならば，同相写像の族 $\{f^n : n\in\boldsymbol{Z}\}$ は同程度連続である．

証明 任意の $\varepsilon>0$ に対し，Poincaré 周期集合 $A\subset\boldsymbol{Z}$ が存在して，すべての $x\in X$ とすべての $n\in A$ に対し，$f^n(x)\in U_{\varepsilon/3}(x)$ を満たす．さらに，$\boldsymbol{Z}=A+K$ を満たす有限集合 $K=\{n_1, n_2, \cdots, n_l\}$ が存在する．このとき $0<\delta<\varepsilon/3$ なる δ があって

$$d(x, y)<\delta \quad \Rightarrow \quad \max\{d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) : 1\leqslant i\leqslant l\}<\varepsilon/3$$

とできる．よって，$d(x, y)<\delta$ ならば任意の $n\in A$ と任意の $n_i\in K$ に対し

$$\begin{aligned} d(f^{n+n_i}(x), f^{n+n_i}(y)) &\leqslant d(f^n(f^{n_i}(x)), f^{n_i}(x)) \\ &\quad + d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) + d(f^{n_i}(y), f^n(f^{n_i}(y))) \\ &\leqslant \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon \end{aligned}$$

であるから，$\{f^n : n\in\boldsymbol{Z}\}$ は同程度連続である．

定理 6・1 の証明 $\inf\{d(f^n(x), f^n(y) : n\in\boldsymbol{Z}\}=0$ を仮定しよう．このとき，任意の $j>0$ に対し $n_j\in\boldsymbol{Z}$ が存在して

$$d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y))<1/j$$

とできる．さらに，補題 6・1 によって $\{f^n : n\in\boldsymbol{Z}\}$ は同程度連続である．よって，任意の $\nu>0$ に対し，$\mu>0$ と $J>0$ が存在して

$$j\geqslant J \Rightarrow d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y))<\mu,$$

$$d(x, y)<\mu \quad \Rightarrow \quad \max\{d(f^n(x), f^n(y)) : n\in\boldsymbol{Z}\}<\nu$$

とできる．

$$d(f^{n_J}(x), f^{n_J}(y))<\mu$$

であるから

$$d(f^{-n_J}(f^{n_J}(x)), f^{-n_J}(f^{n_J}(y)))=d(x, y)<\nu.$$

ところで，$\nu>0$ は任意であるから，$d(x, y)=0$. だから $x=y$ である．

点 $x \in X$ の任意の近傍 $U(x)$ に対し，Poincaré 周期集合 $A \subset \boldsymbol{Z}$ が存在し，すべての $\boldsymbol{n} \in A$ に対し $f^n(x) \in U(x)$ が成り立つとき，点 x を**概周期点**という．f が一様概周期的であれば，X の各点は概周期的である．

順序集合 $(\boldsymbol{B}, \leqslant)$ が**有向集合**であるとは，任意の $\alpha, \beta \in \boldsymbol{B}$ に対して

$$\alpha \leqslant \gamma, \quad \beta \leqslant \gamma$$

となる $\gamma \in \boldsymbol{B}$ が存在するときをいう．

注意 6·1　次は有向集合の例である．

(1)　線形順序集合 $(\boldsymbol{B}, \leqslant)$ は有向集合である．

証明　任意の $\alpha, \beta \in \boldsymbol{B}$ に対し，$\alpha \leqslant \beta$ または $\beta \leqslant \alpha$ が成り立つから，γ として β または α をとればよい．

(2)　自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は線形順序集合であるから，$(\boldsymbol{N}, \leqslant)$ は有向集合である．

(3)　位相空間 (X, θ) の点 x の近傍系 $\boldsymbol{u}(x)$ において，$A, B \in \boldsymbol{u}(x)$ に対し，$A \leqslant B$ を $A \supset B$ によって定めれば，$(\boldsymbol{u}(x), \leqslant)$ は有向集合である．

(4)　2つの有向集合 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ があるとき

$$\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in \boldsymbol{B}_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{B}_2\}$$

において

$$(\alpha_1, \alpha_2) \leqslant (\beta_1, \beta_2) \iff \alpha_1 \leqslant \beta_1, \alpha_2 \leqslant \beta_2$$

と定めれば，$\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2$ はこの順序に関して有向集合を作る．これを $\boldsymbol{B}_1$ と $\boldsymbol{B}_2$ との**直積有向集合**であるという．

(5)　有向集合の族 $\{\boldsymbol{B}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ があるとき，それらの直積集合 $\boldsymbol{B} = \times_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{B}_\lambda$ において

$$(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \leqslant (\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \iff \text{すべての } \lambda \text{ に対し，} \alpha_\lambda \leqslant \beta_\lambda$$

と定めれば，$\boldsymbol{B}$ はこの順序によって有向集合となる．$\boldsymbol{B}$ を $\{\boldsymbol{B}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ の**直積有向集合**であるという．

さて，有向集合 $(\boldsymbol{B}, \leqslant)$ の部分集合に大切な性質がある．有向集合 $(\boldsymbol{B}, \leqslant)$ の部分集合 $\boldsymbol{B}'$ が**共終**であるとは，任意の $\alpha \in \boldsymbol{B}$ に対し，$\alpha \leqslant \alpha'$ となる $\alpha' \in \boldsymbol{B}'$ が存在するときをいう．また有向集合 $\boldsymbol{B}$ の部分集合 $\boldsymbol{B}'$ が**等終**であるとは，ある

$\alpha_0 \in \boldsymbol{B}$ に対し，$\alpha_0 \leqslant \alpha$ ならば $\alpha \in \boldsymbol{B}'$ となるときをいう．例えば，$\alpha_0 \in \boldsymbol{B}$ に対し

$$\boldsymbol{B}(x_0) = \{\alpha \in \boldsymbol{B} : \alpha_0 \leqslant \alpha\}$$

とするとき，$\boldsymbol{B}(\alpha_0)$ は $\boldsymbol{B}$ の等終部分集合である．

自然数の有向集合 $\boldsymbol{N}$ において，$\boldsymbol{N}$ の部分集合 E が共終であるためには，E が無限集合であることが必要十分である．また位相空間 (X, θ) の 1 点 x の近傍系 $\boldsymbol{u}(x)$ を有向集合とみるとき，$\boldsymbol{u}(x)$ の部分集合 $\boldsymbol{u}_0(x)$ が共終であるためには，$\boldsymbol{u}_0(x)$ が近傍の基底であることが必要十分である．

さて，位相空間 (X, θ) における有向点列と，その収束について考えよう．$(\boldsymbol{B}, \leqslant)$ が有向集合であるとき，$\alpha \in \boldsymbol{B}$ を添数とする X の点列 $\{x_\alpha : \alpha \in \boldsymbol{B}\}$ を X の**有向点列**といい，$x(\boldsymbol{B})$ で表す．また X の部分集合 $\{x_\alpha : \alpha \in \boldsymbol{B}\}$ も同じ記号 $x(\boldsymbol{B})$ で表す．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}$（自然数の集合）であるときは，普通いう X の点列と同じである．位相空間 (X, θ) において，X の有向点列 $x(\boldsymbol{B})$ が X の 1 点 x_0 に**収束する**とは，x_0 の任意の近傍 $U \in \boldsymbol{u}(x_0)$ に対し，$\alpha_0 \in \boldsymbol{B}$ が存在して

$$\alpha \geqslant \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad x_\alpha \in U$$

とできることである．このとき x_0 を $x(\boldsymbol{B})$ の**極限点**といい

$$\lim x_\alpha = x_0 \quad または \quad x_\alpha \to x_0$$

で表す．

補題 6·2　位相空間 (X, θ) において，有向点列 $x(\boldsymbol{B})$ が点 $x_0 \in X$ に収束するためには，次の条件が必要十分である．

$\boldsymbol{B}$ の任意の共終部分集合 $\boldsymbol{B}'$ に対し，$x_0 \in \overline{x(\boldsymbol{B}')}$ が成り立つ．

証明　$\Rightarrow$）の証明：$\boldsymbol{B}$ の共終部分集合 $\boldsymbol{B}'$ と x_0 の任意の近傍 U に対し，$x(\boldsymbol{B}') \cap U \neq \phi$ を示せば，$x_0 \in \overline{x(\boldsymbol{B}')}$ が成り立つ．$\lim x_\alpha = x_0$ であるから，$\alpha_0 \in \boldsymbol{B}$ が存在して $\alpha \geqslant \alpha_0$ ならば，$x_\alpha \in U$ となる．一方 $\{\alpha \in \boldsymbol{B} : \alpha \geqslant \alpha_0\} \cap \boldsymbol{B}' \neq \phi$ であるから

$$x(\boldsymbol{B}') \cap U \supset x(\boldsymbol{B}') \cap x(\{\alpha : \alpha \geqslant \alpha_0\}) = x(\boldsymbol{B}' \cap \{\alpha : \alpha \geqslant \alpha_0\}) \neq \phi$$

が導かれる．

$\Leftarrow$）の証明：背理法で証明しよう．任意の共終部分集合 $\boldsymbol{B}'$ に対し，$x_0 \in \overline{x(\boldsymbol{B}')}$ が成り立つのに，$x_\alpha \to x_0$ でないならば，x_0 のある近傍 U に対し $\boldsymbol{B}_1 = \{\alpha \in \boldsymbol{B} : x_\alpha \in U\}$ は $\boldsymbol{B}$ の等終部分集合でない．ゆえに，任意の $\alpha_0 \in \boldsymbol{B}$ に対し $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$ とな

る $\alpha_1 \in \boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{B}_1$ が存在する．すなわち $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{B}_1$ は$\boldsymbol{B}$ の共終部分集合となり

$$x(\boldsymbol{B}_2) \cap U = \phi$$

である．よって $\overline{x(\boldsymbol{B}_2)}$ は x_0 を含まない．これは仮定に反する．

写像の連続性を有向点列を用いて表現しよう．

補題 6・3 位相空間 (X, θ) から位相空間 (Y, θ') への写像 $f: X \to Y$ が連続であるためには，X における収束する有向点列 $x(\boldsymbol{B})$ に対し

$$x_\alpha \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_\alpha) \to f(x_0)$$

が成り立つことが必要十分である．

証明 f が連続であるとする．X において $x_\alpha \to x_0$ であれば，補題6・2によって，$\boldsymbol{B}$ の任意の共終部分集合 $\boldsymbol{B}'$ に対し，$x_0 \in \overline{x(\boldsymbol{B}')}$ である．f の連続性から，

$$f(x_0) \in f(\overline{x(\boldsymbol{B}')}) \subset \overline{f(x(\boldsymbol{B}'))}$$

が成り立つ．よって，補題6・2より $f(x_\alpha) \to f(x_0)$ となる．

逆に，点 x_0 は任意とする．X の任意の部分集合 E に対し $x_0 \in \bar{E}$ であれば，任意の $U \in u(x_0)$ に対して $U \cap E \neq \phi$ である．いま，$u(x_0)$ を有向集合 $\boldsymbol{B}$ とすれば，$x(\boldsymbol{B}) \subset E$，$x_\alpha \to x_0$ となる有向点列 $x(\boldsymbol{B})$ が存在する．仮定によって

$$f(x_\alpha) \to f(x_0), \quad f(x(\boldsymbol{B})) \subset f(E)$$

となる．よって $f(x_0) \in \overline{f(E)}$． このことより

$$f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$$

が成り立つ．よって f は連続である．

補題 6・4 位相空間 $(X_\lambda, \theta_\lambda)(\lambda \in \Lambda)$ の直積位相空間を $X = \times_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とする．X の 有向点列 $x(\boldsymbol{B})$ が $x_0 \in X$ に収束する．すなわち，$x_\alpha \to x_0$ であるためには，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対し，X_λ において

$$P_\lambda(x_\alpha) \to P_\lambda(x_0)$$

が成り立つことが必要十分である．ここに $P_\lambda: X \to X_\lambda$ は射影である．

証明 X において $x_\alpha \to x_0$ であれば，$P_\lambda: X \to X_\lambda$ は連続であるから，補題6・3 によって，X_λ において $P_\lambda(x_\alpha) \to P_\lambda(x_0)$ が成り立つ．

逆に，X の有向点列 $x(\boldsymbol{B})$ と，X の1点 x_0 とに対し，すべての λ で

$$P_\lambda(x_\alpha) \to P_\lambda(x_0)$$

が成り立つとする．X において x_0 の近傍の基底として

$$U(\lambda_1, \cdots, \lambda_n ; U_1, \cdots, U_n) = \bigcap_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}{}^{-1}(U_i)$$

の全体をとることができる．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は Λ から任意に選んだ有限個の元，U_i は $P_{\lambda_i}(x_0)$ の任意の近傍である．いま，$U=U(\lambda_1, \cdots, \lambda_n ; U_1, \cdots, U_n)$ に対し，仮定から

$$\alpha \geqslant \alpha_i \quad \Leftrightarrow \quad P_{\lambda_i}(x_\alpha) \in U_i \quad (i=1, \cdots, u)$$

となるように $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ を選ぶことができる．そのとき，$\alpha_i \leqslant \alpha_0 (i=1, \cdots, n)$ なる $\alpha_0 \in \Lambda$ をとれば

$$\{x_\alpha : \alpha \geqslant \alpha_0\} \subset U = \bigcap_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}{}^{-1}(U_i)$$

となる．よって，X において $x_\alpha \to x_0$ が成り立つ．

コンパクト距離空間 (X, d) の点 y を添字とした空間 X_y を X のコピー $(X_y = X)$ として直積位相空間 $\times_{y \in X} X_y$ を定義し，それを X^X で表す．このとき X^X はコンパクト Hausdorff 空間である．しかし，必ずしも距離空間ではない．

X から X への写像 g と X^X の点 $\{g(x) : x \in X\}$ は1対1に対応するから，X^X は X の上の写像全体の集合とみることができる．

同相写像の族 $\{f^n : n \in \boldsymbol{Z}\}$ を X^X の部分集合と考え，X^X の位相による閉包を $E(X)$ で表す．$g, h \in X^X$ に対し，$\{gh(x) : x \in X\}$ を $g \circ h$ で表すことにしよう．$E(X)$ の部分集合 I が任意の $g \in E(X)$ と任意の $h \in I$ に対し，$g \circ h \in I$ を満たすとき，I は $E(X)$ の**イディアール**であるという．

定理 6・2　コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f がディスタルであれば，任意の点 $x \in X$ は概周期点である．

証明に対しては，上で述べた補題と次の2つの補題が必要である．

補題 6・5　X^X の閉部分集合 $I \neq \phi$ が $E(X)$ のイディアールであれば，$u^2 = u$ なる $u \in I$ が存在する．

証明 $g, h \in E(X)$ に対し

$$L_g(h) = h \circ g$$

によって写像 $L_g : E(X) \to E(X)$ を定義すると, L_g は連続である. 実際に, $E(X)$ の有向点列 $\{h_\alpha\}$ が $E(X)$ の点 h に収束するとする. 補題6·4によって各 $x \in X$ に対し, $h_\alpha(g(x)) \to h(g(x))$ である. だから, $L_g(h_\alpha) \to L_g(h)$.

$S \circ S \subset S$ を満たす I の空でない閉部分集合の全体を $\mathscr{M}$ とする. このとき包含関係によって $\mathscr{M}$ は順序集合をなし帰納的である. よって Zorn の補題によって $\mathscr{M}$ に極小な集合 S が存在する. この S の点 g に対し, $S \circ g = L_g(S) \neq \phi$ かつ

$$(S \circ g) \circ (S \circ g) \subset S \circ S \circ S \circ g \subset S \circ g$$

が成り立つ. S は極小集合であるから, $S \circ g = S$ である. ゆえに, $h \circ g = g$ なる $h \in S$ が存在する. $h \in L_g^{-1}(g) \cap S$ より, $L_g^{-1}(g) \cap S \neq \phi$ である. $f_1, f_2 \in L_g^{-1}(g) \cap S$ に対し, $f_1 \circ g = f_2 \circ g = g$ であるから, $(f_1 \circ f_2) \circ g = f_1 \circ g = g$ が成り立つ. よって$f_1 \circ f_2 \in L_g^{-1}(g) \cap S$ である. ゆえに

$$(L_g^{-1}(g) \cap S) \circ (L_g^{-1}(g) \cap S) \subset L_g^{-1}(g) \cap S$$

である. だから $L_g^{-1}(g) \cap S = S$. よって $g \in L_g^{-1}(g) \cap S$. すなわち $g^2 = g$ が求まる.

補題 6·6 f はディィスタル, M は $E(X)$ の閉集合とする. このとき, 任意の $g \in M$ と任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し, $f^n \circ g \in M$ を満たすならば, $M = E(X)$ である.

証明 仮定によって, $E(X) \circ M \subset M$ が成り立つ. ゆえに補題6·5より, $g^2 = g$ を満たす $g \in M$ が存在し, 任意の $x \in X$ に対し $y = g(x)$ とおくと, $g(x) = g(y)$ である. $g \in E(X)$ から, $f^{n_i} \to g \quad (n_i \to \infty)$ なる列 $\{f^{n_i}\}$ が存在する.

$$d(f^{n_i}(x), f^{n_i}(y)) \leqslant d(f^{n_i}(x), g(x)) + d(g(x), f^{n_i}(y))$$

の右辺の第1項と第2項は $n_i \to \infty$ のとき, それぞれ0に収束する. だから

$$\inf\{d(f^m(x), f^m(y)) : m \in \boldsymbol{Z}\} = 0$$

が成り立つ. f はディィスタルであるから, $x = y$ でなくてはならない. ところで点 $x \in X$ は任意であるから, g は恒等写像 id である. すなわち $f^n \circ id = f^n \in M$ がすべての $n \in \boldsymbol{Z}$ で成り立つ. よって $M = E(X)$ である.

定理 6·2 の証明 $E(X)$ は恒等写像 id を含んでいる. U を $E(X)$ の中の id

の開近傍とすると，Poincaré 周期集合 $A\subset \boldsymbol{Z}$ が存在して，すべての $n\in A$ に対し $f^n\in U$ が成り立つことを示そう．

$h\in E(X)$ を固定して，$R_h(g)=h\circ g(g\in E(X))$ によって写像

$$R_h: E(X)\to E(X)$$

を定義する．このとき h が連続であれば R_h が連続であることは容易に確かめられる．任意の n に対し f^n は連続であるから写像 R_{f^n} は連続かつ

$$R_{f^n}\circ R_{f^{-n}}=R_{f^{-n}}\circ R_{f^n}=id$$

が成り立つ．だから，R_{f^n} は単射である．$R_{f^{-n}}$ は連続であるから

$$R_{f^{-n}}{}^{-1}(U)=f^n\circ U$$

は $E(X)$ の開集合である．よって

$$W=E(X)\setminus(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n\circ U)$$

は $E(X)$ の閉部分集合である．$W\neq\phi$ のとき，任意の $g\in W$ と任意の $n\in \boldsymbol{Z}$ に対し $f^n\circ g\in W$ を得る．よって，補題6·6により $W=E(X)$ である．しかし $W\neq E(X)$ に矛盾する．よって $W=\phi$ である．だから

$$E(X)\subset\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n\circ U$$

を得る．$E(X)$ はコンパクトであるから，有限集合 $K=\{n_1, \cdots, n_l\}$ が存在して

$$E(X)\subset\bigcup_{i=1}^{l} f^{n_i}\circ U$$

とできる．

$$A=\{n\in \boldsymbol{Z}: f^n\in U\}$$

とおくと，任意の $n\in \boldsymbol{Z}$ に対し $n_i\in K$ があって，$f^n\in f^{n_i}\circ U$ である．よって $f^{n-n_i}\in U$ が成り立つ．すなわち $n-n_i\in A$ である．ゆえに $n\in A+K$．n は任意であるから $\boldsymbol{Z}=A+K$ を得る．A は Poincaré 周期集合である．

さて，任意の点 $x\in X$ が f の概周期点であることを示そう．そのために $g\in E(X)$ に対し，$\theta_x(g)=g(x)$ によって連続写像

$$\theta_x: E(X)\to X$$

を定義する．点 x の X での開近傍 V に対し，$E(X)$ の id の開近傍 U が存在して $\theta_x(U)\subset V$ とできる．この U が上で取り扱ったものであるとすると，任意の $n\in A$ に対し

$$f^n(x)=f^n\circ\theta_x(id)=\theta_x(f^n\circ id)=\theta_x(f^n)\in\theta_x(U)\subset V$$

である．よって点 x は f の概周期点である．

定理 6·3 コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f がディスタルであれば，任意の $x\in X$ に対し，$\overline{O_f(x)}$ は f の極小集合である．

証明 定理 6·2 により任意の点 $x\in X$ は f の概周期点である．よって点 x の開近傍 U に対し

$$A=\{n\in\boldsymbol{Z}: f^n(x)\in U\}$$

とおくと，有限集合 $K=\{n_1,\cdots,n_k\}$ が存在して $\boldsymbol{Z}=A+K$ と表される．すなわち A は Poincaré 周期集合である．よって点 x の軌道 $O_f(x)$ の閉包 $\overline{O_f(x)}$ は

$$\overline{O_f(x)}=\overline{\{f^n(x): n\in A\}}\cup\overline{\{f^{n+n_1}(x): n\in A\}}\cup\cdots$$
$$\cdots\cup\overline{\{f^{n+n_k}(x): n\in A\}}$$

と書ける．ゆえに，任意の $y\in\overline{O_f(x)}$ に対し $\overline{O_f(y)}\cap\overline{U}\neq\phi$ である．何故ならば，$y\in\overline{\{f^{n+n_i}(x): n\in A\}}$ なる n_i が存在するから，$f^{-n_i}(y)\in f^{-n_i}\overline{\{f^{n+n_i}(x): n\in A\}}=\overline{\{f^n(x): n\in A\}}\subset\overline{U}$ である．よって $\overline{O_f(y)}\cap\overline{U}\neq\phi$. 近傍 U は任意であるから $x\in\overline{O_f(y)}$. ゆえに $\overline{O_f(x)}=\overline{O_f(y)}$ を得る．すなわち $\overline{O_f(x)}$ は f の極小集合である．

コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f において，f が**半単純**であるとは，X の適当な閉部分集合列 $\{E_\alpha\}$ があって $f(E_\alpha)=E_\alpha$ および $X=\cup_\alpha E_\alpha$ を満たし，さらに各 E_α が極小集合であるときをいう．E_α は極小集合であるから $\alpha\neq\beta$ のとき，$E_\alpha\cap E_\beta=\phi$ が成り立つ．

定理 6·4 コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f がディスタルであれば，f は半単純である．

証明 $\{\overline{O_f(x)}: x\in X\}$ は X の閉被覆で，各軌道の閉包 $\overline{O_f(x)}$ は定理 6·3 によって極小集合である．

§7 拡　大　性

距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が次の条件を満たすとき，f は**拡大的**で

あるという.

実数 $\delta>0$ が存在して，$x, y \in X$ に対し $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \delta$ がすべての $n \in \boldsymbol{Z}$ で成り立つのは $x=y$ のときに限る.

ここに δ は**拡大定数**とよばれる.

状態のつくる空間が距離空間であって，状態は一定の時間間隔で観測する立場に立つとき，拡大性の概念は次のように解釈できる．いま，任意に2つの状態 x，y を観測したとする．このとき x と y がどんなに近くにあっても過去または未来のある時刻において一定の距離以上に離れてしまう．すなわち観測値の微妙な変化は時間の経過と共に相異が現れることを意味している．一方，§6 で述べたディスタルの概念は観測されたどんな2つの状態も過去から未来にわたる時間経過においていくらでも近ずくならば，それらの状態は始めから同じであることを意味している．これら2つの概念にどんな相異がみられるであろうか．いまから拡大性について解説する.

拡大的同相写像 f を許容するコンパクト距離空間 X は"どんな位相空間であるか"を調べよう.

X の有限開被覆 α が f に対する**生成系**であるとは，α の元からなる両側の列 $\{A_n : n \in \boldsymbol{Z}\}$ に対して

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(\overline{A}_n)$$

が高々1点集合であるときをいう．α が**弱生成系**であるとは，α の元の両側列 $\{A_n : n \in \boldsymbol{Z}\}$ に対して

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(A_n)$$

が高々1点集合であるときをいう.

定理 7・1 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が生成系をもつための必要十分条件は f が弱生成系をもつことである.

証明 $\Rightarrow$) は明らかである.

$\Leftarrow$) の証明：$\beta=\{B_1, \cdots, B_s\}$ は f の弱生成系であるとする．$\delta>0$ は β の Lebesgue 数とし，α は $\mathrm{diam}\,(\overline{A}_i) \leqslant \delta$ なる開集合 A_i からなる有限被覆とする．$\{A_{j_n} : n \in \boldsymbol{Z}\}$ は α の元からなる両側列とするとき，任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して B_{j_n}

が存在して $\bar{A}_{j_n}\subset B_{j_n}$ とできる．ゆえに

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{n}(\bar{A}_{j_n})\subset \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(B_{j_n}).$$

すなわち α は生成系である．

α, β は X の部分集合族とする．このとき部分集合族 $\{A\cap B: A\in\alpha, B\in\beta\}$ を $\alpha\vee\beta$ で表す．任意の $B\in\beta$ に対し，$B\subset A$ を満たす $A\in\alpha$ が存在するとき，β は α の**細分**といい $\alpha\leqslant\beta$ で表す．$\alpha\leqslant\alpha\vee\beta$, $\beta\leqslant\alpha\vee\beta$ は明らかである．

f は X から X への連続写像，α は開被覆とするとき

$$f^{-1}(\alpha)=\{f^{-1}(A): A\in\alpha\}$$

も X の開被覆であって

$$f^{-1}(\alpha\vee\beta)=f^{-1}(\alpha)\vee f^{-1}(\beta)$$

$$\alpha\leqslant\beta \;\Rightarrow\; f^{-1}(\alpha)\leqslant f^{-1}(\beta)$$

が成り立つ．

定理 7·2　α はコンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f の生成系であるとする．このとき

（1）任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\bigvee_{n=-N}^{N} f^{-n}(\alpha)$ の各元の直径が ε 以下となるような $N>0$ が存在する．

（2）任意の $N>0$ に対し，$\varepsilon>0$ が存在して

$$d(x, y)<\varepsilon \;\Rightarrow\; x, y\in \bigcap_{n=-N}^{N} f^{-n}(A_n)$$

を満たすように $A_n\in\alpha$ を選ぶことができる．

証明　（1）の証明:（1）を否定すると，$\varepsilon>0$ があってどんな $j>0$ に対しても $d(x_j, y_j)\geqslant\varepsilon$ を満たす $x_j, y_j\in X$ と

$$x_j, y_j\in \bigcap_{i=-j}^{j} f^{-i}(A_{j,i})$$

を満たす $A_{j,i}\in\alpha$ が存在する．X はコンパクトであるから，$x_j\to x$, $y_j\to y$ と仮定することができ $d(x, y)\geqslant\varepsilon$ である．だから $x\neq y$．α は有限であるから $A_{j,0}\in\alpha(j\geqslant0)$ の列は無限に多くの j で一致する．ゆえに無限に多くの j に対し $x_j, y_j\in A_0$ なる $A_0\in\alpha$ が存在する．よって $x, y\in\bar{A}_0$．同様に任意の $n\in\boldsymbol{Z}$, $x\neq$

0 に対し無限に多くの $A_{j,n}$ は一致し，$x, y \in f^{-n}(\bar{A}_n)$ なる $A_n \in \alpha$ を求めることができる．ゆえに

$$x, y \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\bar{A}_n)$$

である．しかし α は生成系であるから矛盾である．

（2）の証明：$N>0$ を固定し $\delta>0$ は有限開被覆 α の Lebesgue 数とする．$d(x, y)<\varepsilon$ ならば，$d(f^i(x), f^i(y))<\delta(-N\leqq i\leqq N)$ を満たすように $\varepsilon>0$ を選ぶとき，$d(x, y)<\varepsilon$ で $|i|\leqq N$ なる i に対して2点 $f^i(x), f^i(y)$ は α の元 A_i に含まれる．よって

$$x, y \in \bigcap_{i=-N}^{N} f^{-i}(A_i)$$

が成り立つ．

定理 7·3 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f に対し，次は同値である．

（1） f が拡大的である．

（2） f は生成系をもつ．

（3） f は弱生成系をもつ．

証明 （2）⇔（3）は定理7·1より明らかである．

（1）⇒（2）の証明：$\delta>0$ は f の拡大定数とし，α は半径 $\delta/2$ の開球からなる有限被覆とする．A_n は α の元で

$$x, y \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(\bar{A}_n)$$

であるとする．このとき $d(f^n(x), f^n(y))\leqq\delta(n\in\boldsymbol{Z})$ から $x=y$ を得る．よって α は生成系である．

（2）⇒（1）の証明：α は生成系とし，$\delta>0$ は α に対する Lebesgue 数とする．任意の $n\in\boldsymbol{Z}$ に対し，$d(f^n(x), f^n(y)\leqq\delta$ とするとき $f^n(x), f^n(y)\in A_n$ なる $A_n\in\alpha$ がすべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して存在する．ゆえに

$$x, y \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(\bar{A}_n).$$

α は生成系であるから，$x=y$ が成り立ち f は拡大的である．

注意 7·1 （1） 空間 X がコンパクトであるとき，拡大性は距離関数に依存しない．しかし拡大定数は距離関数によって変わる．

証明 生成系は距離関数に依存しないことから明らか．

（2） f が拡大的であれば，$f^k(k\neq 0)$ も拡大的であり，逆も成り立つ．

証明 α を f の生成系とするとき

$$\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(k-1)}(\alpha)$$

は f^k の生成系である．α が f^k の生成系であれば，α は当然 f の生成系である．

注意 7·2 f はコンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像とし，点 $x\in X$ は f の不動点 $(f(x)=x)$ であるとしよう．f が拡大的であれば，定理 7·3 より f の生成系 α が存在する．α の元 U が x を含むとすれば，$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^{-j}(U)$ は空ではないから，1 点集合 $\{x\}$ と一致する．いま，$\Lambda^+=\bigcap_{0}^{\infty} f^j(U)$，$\Lambda^-=\bigcap_{0}^{\infty} f^{-j}(U)$ とすると，点 x の近くでの f の挙動は図のようであると考えてよいであろう．

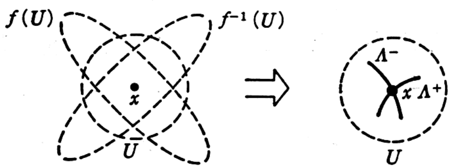


図 3·4

$f: X\to X$，$g: Y\to Y$ は距離空間の上の同相写像とする．f が g に**位相共役**であるとは，$\varphi\circ f=g\circ\varphi$ を満たす同相写像 $\varphi: X\to Y$ が存在することである．

注意 7·3 (X,d), (Y,d') はコンパクト距離空間とし，同相写像 $f: X\to X$，$g: Y\to Y$ は位相共役とする．このとき，f が拡大的ならば g も拡大的である．

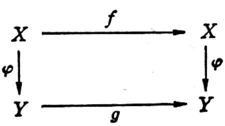


図 3·5

注意 7·4 （1） コンパクト距離空間の上の恒等写像が拡大的であれば，その空間は有限個の点からなる空間に限る．

（2）　コンパクト距離空間の上の拡大的同相写像の不動点の個数は有限個である．

（3）　距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が距離関数 d で拡大的であるとする．H は X の閉部分集合で $f(H)=H$ を満たすとき，H への f の制限 $f_{|H}$: $H \to H$ は距離関数 d で拡大的である．

（4）　$Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ の上の推移写像 σ は拡大的である．

証明　Y_k は有限集合 $Y_k=\{0, 1. \cdots, k-1\}$ であった（p. 39 を参照）

$$A_i=\{(x_n) \in Y_k^{\boldsymbol{Z}} :\ x_0=i\} \quad (i=0, \cdots, k-1)$$

とおくと，各 A_i は開集合かつ

$$Y_k^{\boldsymbol{Z}}=A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}$$

である．$x \in Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ に対し，$x \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^{-n}(A_{i_n})$ であれば

$$x=(\cdots, i_{-2}, i_{-1}, j_0, i_1, i_2, \cdots)$$

と表される．よって $\alpha=\{A_0, \cdots, A_{k-1}\}$ は生成系である．ゆえに推移写像 σ は拡大的である．σ の拡大定数を求めるために，$Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ の上の距離関数 d を

$$d((x_n), (y_n))=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_1(x_n, y_n)/2^{|n|}$$

で定義する．ここに d_1 は Y_k の上の離散距離関数 $(d_1(x, y)=1\ (x \neq y),\ d_1(x, y)=0\ (x=y))$ である．このとき $(x_n) \neq (y_n)$ であれば $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ なる n_0 があって

$$d(\sigma^{n_0}(x_n), \sigma^{n_0}(y_n))=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_1(x_{n+n_0}, y_{n+n_0})/2^{|n|} \geqq d_1(x_{n_0}, y_{n_0})=1.$$

よって1が拡大定数である．

コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像を f とする．点 $x \in X$ に対し，整数列 $0<n_1<n_2<\cdots$ が存在して，$\lim_{j \to \infty} f^{n_j}(x)=y$ なる点 y の集合を $\omega(x)$ で表す．$\omega(x)$ は x の ω-**極限集合**とよばれる．単調減少列 $0>n_1>n_2>\cdots$があって $\lim_{j \to \infty} f^{n_j}(x)=y$ なる点 y の集合を α-**極限集合**とよび $\alpha(x)$ で表す．$\omega(x), \alpha(x)$ は f-不変集合，すなわち $f(\omega(n))=\omega(x)$，$f(\alpha(x))=\alpha(x)$ である．集合 $\omega(x), \alpha(x)$ が共に1点集合であるとき，点 x は f に対する**収束半軌道**をもつという．この場合，$\omega(x)=\{p\}$，$\alpha(x)=\{q\}$ であるから，p, q は f の不動点である．

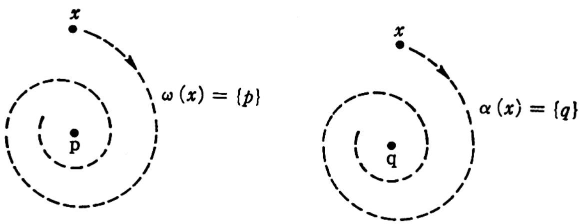


図 3·6

定理 7·4 f はコンパクト距離空間 (X, d) の上の拡大的同相写像とする．このとき，f による収束半軌道をもつ点の集合は可算集合である．

証明 $c>0$ は f の拡大定数とする．A は収束半軌道をもつ点の集合とし，A は非可算であると仮定しよう．$x\in A$ に対し $\omega(x)$ と $\alpha(x)$ は f の不動点である．f は拡大的であるから，f の不動点の集合は有限集合 $\{q_1, \cdots, q_k\}$ でなければならない．$\alpha(x)=q_i, \omega(x)=q_j$ なる x の集合を $A(i, j)$ としよう．このとき，A は $A(i, j)$ の有限和集合である．だから，$A(i, j)$ の 1 つは非可算無限集合である．それを B とする．任意の $N>0$ に対し，$B(N)$ はすべての $n>N$ に対し

$$d(f^n(x), \omega(x))<c/2, \quad d(f^{-n}(x), \alpha(x))<c/2$$

を満たす B の点 x の集合とする．B は $B(N)$ の和集合であるから，それらの 1 つを $B(M)$ とするとき，$B(M)$ は無限集合である．X はコンパクトであるから

$$0<d(y, z)<c/2$$

なる点 $y, z\in B(M)$ があって $|n|<M$ なる n に対し，$d(f^n(z), f^n(y))<c$ とできる．ゆえに，任意の $n\in\boldsymbol{Z}$ に対し $d(f^n(y), f^n(z))<c$ であるから，$y=z$ となって，$y\neq z$ に矛盾する．ゆえに A は可算集合である．

注意 7·5 閉区間 $[0, 1]$ の上の同相写像は拡大的ではない．

証明 $[0, 1]$ の上の同相写像 f は単調増大であるか，単調減少であるかのいずれかである．単調増大の場合は

(1) $f(0)=0, \ f(1)=1$

であって，単調減少の場合は

(2) $f(0)=1, \ f(1)=0$

である．(1) の場合，$\mathrm{Fix}(f)=\{x\in[0,1]:f(x)=x\}$ とおけば，$\mathrm{Fix}(f)$ は閉部分集合である．$\mathrm{Fix}(f)=[0,1]$ のときは，$[0,1]$ のすべての点は f の収束

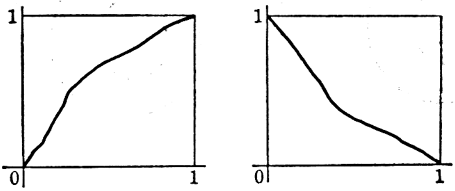


図 3·7

半軌道をもつ．$\mathrm{Fix}(f)\subsetneqq[0,1]$ のときは，$U=[0,1]\setminus\mathrm{Fix}(f)$ は空ではない開集合であるから，互いに交わりのない区間 I_j の高々可算個の和集合 $U=\cup_j I_j$ で表される．よって任意の $x\in U$ に対し，ある I_j があって $x\in I_j$ である．I_j の閉包 $\bar{I}_j$ の端点は f の不動点である．ところで，$\bar{I}_j$ の上の f のグラフは対角線の上側にあるか，あるいは下側にあるかのいずれかである．いま，上にあるとすれば，$x<f(x)<f^2(x)<\cdots$ が成り立つ．よって，$\{f^j(x):j\geqq 0\}$ の極限点 x_0 は f の不動点である．すなわち，$\omega(x)=\{x_0\}$．同様にして $\alpha(x)$ も 1 点集合である．

(2) の場合，$f^2:[0,1]\to[0,1]$ に対して上の議論を適用すればよい．このとき，$[0,1]$ のすべての点は f^2 に対する収束半軌道をもつことがわかる．

以上から定理 7·4 を適用すると，$f:[0,1]\to[0,1]$ は拡大的でないことが結論できる．

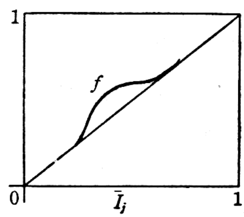


図 3·8

定理 7·5 単位円周 S^1 の上には拡大的同相写像は存在しない．

証明 同相写像 $f:S^1\to S^1$ は拡大的であると仮定しよう．このとき，注意 7·5 により，f は周期点をもたない．何故ならば，2 点 x,y は S^1 の f による周期点としよう．このとき，$f^k(x)=x$，$f^k(y)=y$ なる自然数 $k>0$ が存在する．$g=f^k$ とおくと，S^1 の 1 つの弧 c (両端を含む) は g あるいは g^2 に関して不変である．いま，$g^2(c)=c$ であるとすれば $f:S^1\to S^1$ は拡大的であるから，$g^2:S^1\to S^1$ も拡大的である．よって g^2 の c への制限 $g^2:c\to c$ も拡大的である．このこ

とは注意7·5に矛盾する．ゆえに，S^1 の上に2つ以上の周期点は存在しない．

よって，S^1 に f の周期点が存在するとすれば，ただ1点である．この場合，S^1 のすべての点の f による軌道は，その周期点に収束する．同様に f^{-1} による軌道も周期点に収束する．だから，S^1 のすべての点は f に対する収束半軌道をもつ．ゆえに定理7·4より，$f: S^1 \to S^1$ は拡大的ではない．

以上から，$f: S^1 \to S^1$ は周期点をもたない．

S^1 はコンパクトであるから，f の極小集合 M が S^1 に存在する（定理4·2）$f: M \to M$ は拡大的かつ極小的であるから，この後の§10の定理10·1によって，M は完全不連結である．M は無限集合であることに注意する．

まず，M は孤立点を含まないことを示そう．

仮に孤立点 $x \in M$ が存在したとしよう．このとき，$U_\delta(x) \cap M = \{x\}$ なる $\delta > 0$ が存在する．よって，$\{x\}$ は M の中で開集合である．M は f の極小集合であるから，$\overline{O_f(x)} = M$ である．よって $f^n(x) \in U_\delta(x) \cap M = \{x\}$ なる $n \in \boldsymbol{Z}(n \neq 0)$ が存在し，$f^n(x) = x$ を得る．しかし，f は周期点をもたないから矛盾である．

M の補集合 M^c は開集合で，それは S^1 の開弧 I_j（端点を含まない弧）の和集合 $M^c = \cup_{j \geqq 0} I_j$ で表される．ここに各 I_j は M^c の中で連結成分であると考えて一般性を失わない．よって $i \neq j$ ならば，$I_i \cap I_j = \phi$ である．M^c は無限個の弧 I_j の和集合であることに注意する．よって，$\mathrm{diam}(I_j) \to 0$ $(j \to \infty)$ である．各 $j \geqq 0$ を固定し，任意の $n \in \boldsymbol{Z}(n \neq 0)$ に対し $f^n(I_j) \neq I_j$ であることを示そう．

仮に $f^n(I_j) = I_j$ であるとすると，f^n の連続性によって $f^n(\bar{I}_j) = \bar{I}_j$ である．$\bar{I}_j$ への f^n の制限 $f_{|\bar{I}_j}{}^n: \bar{I}_j \to \bar{I}_j$ は仮定によって拡大的である．しかし，注意7·5によって，これは不可能である．

$f(M) = M$ であるから，$f(M^c) = M^c$，すなわち

$$f(\cup_{j \geqq 0} I_j) = \cup_{j \geqq 0} I_j$$

かつ各 I_j は f によって，ある I_{j_i} に写像（$f(I_j) = I_{j_i}$）されなくてはならない．ゆえに任意の $j \geqq 0$ に対し

$$\mathrm{diam}(f^n(I_j)) \to 0 \quad (|n| \to \infty)$$

が成り立つ．$a \neq b$ は I_j の2点とし，開弧の族 $\{f^n(\widehat{ab}) : n \in \boldsymbol{Z}\}$ の中で最大な長さをもつ開弧を $f^{n_0}(\widehat{ab})$ とする．$\varepsilon > 0$ を任意に選んだとき，$f^{n_0}(a)$ と $f^{n_0}(b)$

の弧の長さが ε 以下であるように2点 a, b を I_j の中で選ぶとき，すべての $n\in \boldsymbol{Z}$ に対し $\mathrm{diam}(f^n(\widehat{ab}))<\varepsilon$ となって，$f: S^1\to S^1$ の拡大性に反することになる．ゆえに f は S^1 の上で拡大的ではない．

注意 7·6 （1） 閉区間 $I=[0,1]$ の直積区間 $I\times I$ の上には拡大的同相写像は存在しない．

証明 $I\times I$ の境界は単位円周と同相である．$I\times I$ の上の同相写像 f は境界を境界に写す．f を境界に制限したとき，その制限は定理 7·5 によって拡大的ではない．ゆえに注意 7·4 (3) より，f は拡大的ではない．

（2） $f_1: X_1\to X_1$，$f_2: X_2\to X_2$ が拡大的であれば，$f_1\times f_2: X_1\times X_2\to X_1\times X_2$ $(f_1\times f_2(x_1, x_2)=(f_1(x_1), f_2(x_2)))$ も拡大的である． 拡大的同相写像の有限直積は拡大的である．

定理 7·7 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が拡大的であれば，自然数 k と $Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ の閉部分集合 Σ が存在して，$Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ の上の推移写像 σ に関して $\sigma(\Sigma)=\Sigma$ を満たし，さらに，$\pi\circ\sigma_{|\Sigma}=f\circ\pi$ を満たすように Σ から X の上への連続写像 π が存在する．

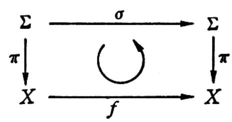


図 3·9

証明 $c>0$ は f の拡大的定数とする．X はコンパクトであるから，$\mathrm{diam}(A_i)<c$ なる閉集合の有限閉被覆 $\alpha=\{A_0, \cdots, A_{k-1}\}$ を，各 A_i が境界だけで共通部分をもつように選ぶことができる．D は各 A_i の境界の和集合とする．このとき，D は内点をもたない閉集合である．よって $X\setminus D$ は開集合かつ X で稠密である．だから

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}(X\setminus f^n(D))=R$$

は Baire 集合である．各 $x\in R$ に対し

$$f^n(x)\in A_{a_n} \quad (n\in \boldsymbol{Z})$$

となる点列 (a_n) がただ1つ存在するから，対応

$$\pi^{-1}: x\longmapsto (a_n)$$

を考えることができる．Λ はこのような点列 (a_n) の集まりとすれば，Λ は $Y_k^{\boldsymbol{Z}}$

の部分集合で，$\pi: \Lambda \to R$ は

$$\pi \circ \sigma = f \circ \pi$$

を満たす写像である（$\pi^{-1}: R \to \Lambda$ は1対1であることに注意する）

もし π が一様連続であれば，π は Λ の閉包 Σ から X の上への連続写像に拡張することができる．よって定理が得られる．

α の各元は直径が拡大定数 c 以下である．$\varepsilon>0$ を任意に選ぶとき，定理 7.2 より，$\bigvee_{n=-N}^{N} f^n(\alpha)$ の各集合の直径が ε 以下となるように $N>0$ をみつけることができる．ゆえに (a_n)，$(b_n) \in \Lambda$ が $|n| \leqslant N$ なる n に対して，$a_n = b_n$ のとき

$$\pi((a_n)) \in \bigcap_{-N}^{N} f^{-n}(A_{a_n}), \qquad \pi((b_n)) \in \bigcap_{-N}^{N} f^{-n}(A_{b_n})$$

である．ところが，それぞれの右辺の集合は等しく，その集合は $\bigvee_{n=-N}^{N} f^n(\alpha)$ の元である．ゆえに

$$d(\pi((a_n)),\ \pi((b_n)) < \varepsilon.$$

よって π は一様連続である．

§8 拡大性と空間の次元

集合 Y の有限個の部分集合の族を Σ とする．$x \in Y$ に対して，点 x を含む族 Σ の集合の数を $r(x)$ で表す．集合 Y の上に与えられた関数 r の最大値を族 Σ の**重複度**という．

Σ' は Σ の細分であるとき，Σ の重複度は Σ' の重複度を越えないことは明らかである．

（i） コンパクト Hausdorff 空間 X の有限開被覆 α に対して，いつも α の細分である X の有限閉被覆 β で，β の重複度が α の重複度を越えないように選ぶことができる．

何故ならば，各点 $x \in X$ に対し，x の近傍 U_x の閉包 $\overline{U}_x$ が α のある開集合に含まれるようにできる．族 $\{\overline{U}_x : x \in X\}$ による X の被覆から有限被覆を選べば，$\overline{U}_x$ なる形の閉集合による X の有限閉被覆 β を得る．これは α の細分である．次に，α の元 U に含まれる族 β の集合全部の和集合を F_U で表す．閉集合族 $\beta' = \{F_U : U \in \alpha\}$ は X の被覆である．β' は α の細分である．しかも β' の重複度は α の重複度を越えない．

いま，コンパクト Hausdorff 空間 X に次元の定義を与えよう．次の2つの条件を満たす整数 $n\geqslant 0$ が存在するとき，空間 X の（位相的）**次元**は n であるといい，$\dim(X)=n$ で表す．

（ii） X の有限開被覆をどのように選んでも，それの細分である X の閉被覆で，その重複度が $n+1$ を越えないものが存在する．

（iii） X の有限開被覆で，その細分である X の有限閉被覆がすべて n より大きい重複度をもつように選べる．

条件（ii），（iii）の性質をもつ整数 $n\geqslant 0$ が存在しない場合には，空間 X の次元は**無限次元**であるという．

条件（ii）は空間 X の次元が n 以下であることを意味している．（i）を使うと条件（ii）は次のように言い換えることができる．

（iv） 空間 X の有限開被覆をどのように選んでも，その重複度が $n+1$ を越えないならば，X の次元は n 以下である．

注意 8・1 コンパクト距離空間 (X, d) が完全不連結であるための必要十分条件は X の次元が $\dim(X)=0$ となることである．

証明 X は完全不連結であるとする．このとき，開かつ閉集合の可算集合族が X の位相の基底となるように選ぶことができる（次の注意8・2を参照）Γ を X の任意の開被覆とする．任意の $x\in X$ に対し点 x を含む開集合 $U_x\in\Gamma$ を対応させる．このとき，$x\in V_x\subset U_x$ なる開かつ閉集合 V_x が存在する．$\{V_x : x\in X\}$ から有限被覆 $\{W_1, \cdots, W_k\}$ を選び

$$F_1=W_1,\ \ F_2=W_2\setminus W_1, \cdots, F_k=W_k\setminus(W_1\cup\cdots\cup W_{k-1})$$

とおく．$\{F_1, \cdots, F_k\}$ は Γ の細分で，X の重複度は1である有限被覆である．Γ は任意であるから，X の次元は0である．

逆に，X は0次元であるとする．$a\neq b$ なる $a, b\in X$ を任意に選びなさい．$U=X\setminus\{a\}$, $V=X\setminus\{b\}$ とおくと，$\{U, V\}$ は X の開被覆である．$F_1, \cdots, F_k$ は重複度1なる X の閉被覆で $\{U, V\}$ の細分とし，$a\in F_1$ であるとする．X は2つの互いに交わらない閉集合 F_1 および閉集合 $F_2\cup\cdots\cup F_k$ の和集合で表される．よって，a の連結成分は F_1 に含まれる．したがって，$X\setminus\{b\}$ にも含まれる．すなわち F_1 は b を含まない．b は任意であるから，a の成分は a 自身である．こ

れは X が完全不連結であることを意味している.

注意 8・2　(X,θ) はコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき, X が完全不連結であるための必要十分条件は X のすべての開かつ閉集合の族 θ_0 が位相 θ の基底であることである.

証明　θ_0 は θ の基底であるとする. X が Hausdorff であることに注意しよう. X の任意の 2 点 $x, y(x \neq y)$ に対し, x を含み y を含まない開近傍 U_y が存在する. 仮定によって $B \in \theta_0$ があって $x \in B \subset U_y$ を満たすようにできる. B の補集合 B^c は開かつ閉集合で, $y \in B^c$ である. よって, x の連結成分 $c(x)$ は B に含まれる. ところで, y は任意であるから

$$c(x) \subset \cap \{U_y : x \neq y, y \in X\} = \{x\}.$$

ゆえに, X は完全不連結である.

逆を示そう. 任意の $x \in X$ を固定し, G は x を含む開集合とする. このとき $x \in B \subset G$ なる開かつ閉集合 B をみつければよい. $G \underset{*}{\subset} X$ と仮定してよい. 何故ならば, もし $X=G$ のとき $B=X$ となるように B を選べばよい.

X はコンパクトであるから, G の補集合 G^c も同様にコンパクトである. X は完全不連結であるから, X の各点は開かつ閉集合の共通部分として表される. よって, 任意の $y \in G^c$ に対し $y \in H_y$ しかし $x \notin H_y$ なる開かつ閉集合 H_y をみつけることができる. G^c はコンパクトであるから, G^c は開かつ閉集合 H_{y_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ の和集合で被覆される. すなわち, $G^c \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_{y_i}$ である. 各 H_{y_i} は $x \notin H_{y_i}$ を満たしていることに注意する. $H = \bigcup_{i=1}^{n} H_{y_i}$ とおくと, H は開かつ閉集合で $x \notin H$ である. ゆえに $B=H^c$ とすると $x \in B \subset G$ を満たす.

注意 8・3　コンパクト距離空間 $Y_k^{\mathbf{Z}}$ と Cantor 集合はともに完全不連結であるから, 0 次元空間である.

注意 8・4　閉区間 $[0,1]$ は 1 次元である.

証明　任意の $r>0$ に対し, $1/n \leqslant r/2$ となる自然数 n を選んで $[0,1]$ の点 $k/n(k=0=0, 1, \cdots, n)$ を中心とし, 半径 $1/n$ の開球と $[0,1]$ との共通部分を

$U_{k/n}$ とする．このとき，$u=\{U_0, U_{1/n}, \cdots, U_1\}$ は $[0,1]$ の開被覆で

$$U_{i/n}\cap U_{(i+1)/n}\neq\phi \quad (i=0,1,\cdots,n-1)$$

である．よって，u の重複度は 2 である．r は任意であるから，$\dim([0,1])\leqslant 1$ が求まる．次に $[0,1]$ のどんな有限開被覆 u をもってきても，その細分である有限閉被覆の重複度は少なくとも 1 より大きい．よって，$\dim([0,1])=1$ である．

拡大的同相写像を許容するコンパクト距離空間は有限次元に限ることを示そう．

定理 8·1　コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が拡大的であれば X は有限次元である．

証明　任意の $\delta>0$ に対し，直径が δ 以下の開被覆があって，その重複度が高々 $n+1$ 以下であれば，次元の定義の (iv) を満たす．よって，空間 X の次元は n 以下である．したがって，このような $n\geqslant 0$ の存在を示せばよい．

$c>0$ は f の拡大定数とし，$0<\varepsilon<c/2$ なる ε を固定する．証明は 3 段階に分けて行う．

段階 (1):　$\delta>0$ があって $d(x,y)<\delta$ なる $x, y\in X$ に対し

$$\varepsilon\leqslant\max\{d(f^j(x), f^j(y)) : 0\leqslant j\leqslant n\}\leqslant 2\varepsilon$$

を満たす $n>0$ が存在すれば，$d(f^n(x), f^n(y))>\delta$ が成り立つ．

この命題を否定すれば，任意の $n\geqslant 1$ に対し，$x_n, y_n\in X$ と整数 $m_n>0$ が存在して

$$d(x_n, y_n)\to 0, \qquad d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n))\to 0 \quad (n\to\infty)$$

を満たし，$m_n>l_n>0$ なるある l_n に対し

$$d(f^{l_n}(x_n), f^{l_n}(y_n))\geqslant\varepsilon$$

さらに

$$(*)\qquad \max\{d(f^m(x_n), f^m(y_n)), : 0\leqslant m\leqslant m_n\}\leqslant 2\varepsilon$$

が成り立つ．X はコンパクトであるから

$$f^{l_n}(x_n)\to x, \qquad f^{l_n}(y_n)\to y \quad (n\to\infty)$$

とできる (実際には $\{f^{l_n}(x_n)\}, \{f^{l_n}(y_n)\}$ の部分列が収束する)．よって

$d(x, y) \geqslant \varepsilon$ である．$l_n < m_n$ であるから，任意の $j \in \boldsymbol{Z}$ に対し

$$d(f^j(x), f^j(y)) \leqslant 2\varepsilon < c$$

が成り立つ．何故ならば，いま任意の $j \geqslant 0$ を固定する．$d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n)) \to 0\ (n \to \infty)$ より，十分大きな $N > 0$ に対し，f の一様連続性から

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad d(f^i \circ f^{m_n}(x_n), f^i \circ f^{m_n}(y_n)) \leqslant 2\varepsilon \quad (0 \leqslant i \leqslant j)$$

が成り立つ．ゆえに，十分大きな n' に対して $0 \leqslant j + l_n < j + m_n \leqslant m_n{}'$ であるから (*) より

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad d(f^j \circ f^{l_n}(x_n), f^j \circ f^{l_n}(y_n)) \leqslant 2\varepsilon$$

したがって，$d(f^j(x), f^j(y)) \leqslant 2\varepsilon$ を得る．$j < 0$ の場合は $d(x_n, y_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ より同様にして，$d(f^j(x), f^j(y) \leqslant 2\varepsilon$ が求まる．ところで，f は拡大的であるから，$x = y$ となって $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ に矛盾する．

段階 (2)： 任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対し，$N(\varepsilon_1) = N > 0$ が存在して $d(x, y) \geqslant \varepsilon_1$ であれば次が成り立つ．

$$\max\{d(f^n(x), f^n(y_n)) : |n| \leqslant N\} > \varepsilon.$$

この命題を否定すると，任意の $n \geqslant 1$ に対し $d(x_n, y_n) \geqslant \varepsilon_1$ なる $x_n, y_n \in X$ が存在して

$$\max\{d(f^j(x_n), f^j(y_n)) : |j| \leqslant n\} \leqslant \varepsilon$$

が得られる．$x_n \to x$，$y_n \to y\ (n \to \infty)$ とするとき，$d(x, y) \geqslant \varepsilon_1$，さらに $d(f^j(x), f^j(y)) \leqslant \varepsilon\ (j \in \boldsymbol{Z})$ であるから，f の拡大性に矛盾する．

段階 (3)： $\delta > 0$ は段階 (1) のものとする．X の有限開被覆 $u = \{U_i : 1 \leqslant i \leqslant l\}$ の各集合の直径が δ 以下であるとする．このような被覆の重複度が有界であれば，次元の定義 (iv) によって，空間 X の次元は有限である．今から u の重複度は l^2 以下であることを示そう．

任意に $n \geqslant 1$ を固定して，次を満たす $\delta_n > 0$ を選びなさい．

$$d(x, y) < \delta_n \quad \Rightarrow \quad d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon \quad (|j| \leqslant n).$$

u に属する 2 つの開集合 U_i, U_j に対し

$$U_{i,j}{}^n = f^n(U_i) \cap f^{-n}(U_j)$$

とおくと，$\{U_{i,j}{}^n : 0 \leqslant i, j \leqslant l\}$ は X の開被覆である．任意の $x, y \in U_{i,j}{}^n$ に対し $d(x_r, x_{r+1}) \leqslant \delta_n$ を満たす $U_{i,j}{}^n$ の点列

$$x_0 = x,\ \ x_1, \cdots, x_p = y$$

が存在するとき，$x\sim y$ と表す．このとき記号$\sim$は同値関係を満たす．この同値関係によって $U_{i,j}^{n}$ の点を類別し，その類を $U_{i,j}^{n,k}(1\leqslant k\leqslant k(i,j,n))$ で表し，δ_n-成分とよぶことにする．各 $U_{i,j}^{n,k}$ は開集合で

$$u'=\{U_{i,j}^{n,k}: 1\leqslant i,j\leqslant l, 1\leqslant k\leqslant (i,j,l)\}$$

は X の開被覆である．次の (**) が成り立つならば，各 $U_{i,j}^{n,k}$ は n の増大につれてその集合の直径が 0 に近づくことがわかる．

$$(**)\qquad \lim_{n\to\infty}\{\sup_{k,i,j}\operatorname{diam}(U_{i,j}^{n,k})\}=0$$

このとき，任意の $n\geqslant 1$ に対し，$x\in X$ は u' の中の高々 l^2 個の集合に含まれなくてはならない．何故ならば

$$\bigcap\{U_{i_m,j_m}^{n,k_m}: 1\leqslant m\leqslant s\}\neq\phi$$

とする．各 $U_{i,j}^{n,k}$ は $U_{i,j}^{n}$ の δ_n-成分であるから，$(i_m,j_m)=(i_{\overline{m}},j_{\overline{m}})$ ならば

$$U_{i_m,j_m}^{n,k_m}=U_{i_{\overline{m}},j_{\overline{m}}}^{n,k_{\overline{m}}}$$

である．よって

$s\leqslant l^2$ である．ゆえに u' の重複度は l^2 以下である．

今から (**) を示そう．(**) を否定したとき，$\varepsilon_1>0$ と段階 (2) で存在した $N(\varepsilon_1)$ に対し，$n\geqslant 2N(\varepsilon_1)$ なる n に対して，$d(x,y)>\varepsilon_1$ なる x,y を含む $U_{i,j}^{n,k}$ が存在する．このとき

$$x_0=x,\ \ x_1,\cdots,x_p=y$$

なる列が $U_{i,j}^{n,k}$ に存在して $d(x_r,x_{r+1})\leqslant\delta_n$ $(0\leqslant r\leqslant p-1)$ が成り立つ．

$$s_r=\max\{d(f^m(x_r),f^m(x_0)):|m|\leqslant n\}$$

とおくとき，段階 (2) より $s_p>\varepsilon$ を得る．δ_n の選び方によって $s_1<\varepsilon$ である．ゆえに

$$|s_{r+1}-s_r|\leqslant\varepsilon\quad(1\leqslant r\leqslant p-1)$$

である．実際に，$m,m'\in(-n,n)$ があって

$$\begin{aligned}s_{r+1}-s_r&=d(f^m(x_{r+1}),f^m(x_0))-d(f^{m'}(x_r),f^{m'}(x_0))\\&\leqslant d(f^m(x_{r+1}),f^m(x_0))-d(f^m(x_r),f^m(x_0))\\&\leqslant d(f^m(x_{r+1}),f^m(x_r))\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

また，同様に $s_r-s_{r+1}\leqslant\varepsilon$ である．

$s_r>\varepsilon$ で $s_{r'}\leqslant\varepsilon(r'<r)$ なる $r>0$ が存在する．この r に対して $s_r\leqslant 2\varepsilon$ を得る．

$$f^{-n}(x_0),f^{-n}(x_r)\in U_i,\quad f^n(x_0),f^n(x_r)\in U_j$$

から，$d(f^{-n}(x_0),f^{-n}(x_r))\leqslant\delta$，$d(f^n(x_0),f^n(x_r))\leqslant\delta$ である．さらに

$$\varepsilon\leqslant s_r=\max\{d(f^m(x_0),f^m(x_r)):|m|\leqslant n\}\leqslant 2\varepsilon.$$

いま，$x_0'=f^{-n}(x_0), x_r'=f^{-n}(x_r)$ とおくと

$$\varepsilon\leqslant\max\{d(f^m(x_0'),f^m(x_r')):0\leqslant m\leqslant 2n\}\leqslant 2\varepsilon$$

を得る．$d(x_0',x_r')<\delta$ であるから，段階 (1) によって

$$d(f^{2n}(x_0'),f^{2n}(x_r'))=d(f^n(x_0),f^n(x_r))>\delta$$

が成り立つ．これは $d(f^n(x_0),f^n(x_r))\leqslant\delta$ に矛盾する．よって (**) が成り立つ．これで定理が証明された．

第4章　力学的性質

ここでは，主としてコンパクト距離空間の上の同相写像の拡大性と擬軌道追跡性を中心として，力学的性質を考察する．

§9 では，拡大的同相写像の局所（不）安定集合と（不）安定集合との関係，拡大的同相写像の局所（不）安定集合の上での挙動の距離的記述が簡明となるような距離関数の存在を述べる．§10 では，拡大的な同相写像の極小集合は完全不連結であることを証明する．§11 では，擬軌道追跡性に関する基本的性質を調べ，部分推移系が擬軌道追跡性を満たすための必要十分条件は，それが有限型であることを証明する．

§12 では，拡大的で標準座標系をもつ同相写像は擬軌道追跡性をもつこと，逆に，擬軌道追跡性をもつ同相写像は標準座標系をもつこと等を証明する．最後に§13 では，被覆空間の底空間の同相写像とそのリフトに関して，擬軌道追跡性および拡大性がそれぞれ同値であることを示す．

§9　拡大性と歪率

f はコンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像とする．任意の $\delta>0$ と任意の $x\in X$ に対し部分集合

$$W_\delta^s(x,d)=\{y\in X : d(f^n(x),f^n(y))\leqslant\delta,\ n\geqslant 0\},$$
$$W_\delta^u(x,d)=\{y\in X : d(f^n(x),f^n(y))\leqslant\delta,\ n\leqslant 0\}$$

を定義する．$W_\delta^s(x,d)$ を**局所安定集合**，$W_\delta^u(x,d)$ を**局所不安定集合**という．

注意 9·1　f は拡大的であるとし，その拡大定数を $c>0$ とする．このとき $0<\varepsilon\leqslant c$ なる ε を固定し，任意の $r>0$ に対し $N>0$ が存在して，すべての $x\in X$ とすべての $n\geqslant N$ に対して

$$f^n(W_\varepsilon^s(x,d))\subset W_r^s(f^n(x),d),$$
$$f^{-n}(W_\varepsilon^u(x,d))\subset W_r^u(f^{-n}(x),d)$$

が成り立つ．

証明 命題を否定すると，$y_n \in W_\varepsilon^s(x_n, d)$ と $d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n)) > r$ を満たす点 $x_n, y_n \in X$ と，$\lim_n m_n = +\infty$ を満たす整数 $m_n > 0$ が存在する．$y_n \in W_\varepsilon^s(x_n, d)$ であるから，すべての $j \geqslant -m_n$ に対し

$$d(f^j \circ f^{m_n}(x_n), f^j \circ f^{m_n}(y_n)) \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ．よって

$$f^{m_n}(x_n) \to x, \quad f^{m_n}(y_n) \to y \quad (n \to \infty)$$

とすると，すべての $j \in \mathbf{Z}$ に対し $d(f^j(x), f^j(y)) \leqslant \varepsilon$ が成り立つ．f の拡大性より $x = y$ を得る．しかし

$$d(x, y) = \lim_{n \to \infty} d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n)) \geqslant r.$$

これは矛盾である．同様にして後半の包含関係も求まる．

任意の $x \in X$ に対し

$$W^s(x, d) = \{y \in X : \lim_{n \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$$

によって，点 x の**安定集合** $W^s(x, d)$ を定義し

$$W^u(x, d) = \{y \in X : \lim_{n \to \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$$

によって，点 x の**不安定集合** $W^u(x, d)$ を定義する．

注意 9・2 任意の $y \in W^s(x, d)$ に対し，$W^s(y, d) = W^s(x, d)$ が成り立ち，任意の $z \in W^u(x, d)$ に対し，$W^u(z, d) = W^u(x, d)$ が成り立つ．

定理 9・1 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が拡大的であれば，

$$W^s(x, d) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x), d)),$$

$$W^u(x, d) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^n(W_\varepsilon^u(f^{-n}(x), d))$$

が成り立つ．ここに ε は注意9・1のように選ばれた正数である．

証明 任意の $y \in \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x), d))$ に対し，$n \geqslant 0$ があって $f^n(y) \in W_\varepsilon^s(f^n(x), d)$ とできる．注意9・1を利用すると，$r > 0$ に対し $N > 0$ が存在して，すべての $m \geqslant N$ に対し

$$f^{m+n}(y) \in f^m(W_\varepsilon^s(f^n(x), d)) \subset W_r^s(f^{m+n}(x), d)$$

であるから

$$d(f^{m+n}(y), f^{m+n}(x)) \leqslant r \quad (m \geqslant N).$$

ゆえに $y \in W^s(x, d)$ が成り立つ.

逆に，任意の $z \in W^s(x, d)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N > 0$ があって，すべての $n \geqslant N$ に対し $d(f^n(x), f^n(z)) \leqslant \varepsilon$ である．ゆえに，任意の $j \geqslant 0$ に対し

$$d(f^j \circ f^N(x), f^j \circ f^N(z)) \leqslant \varepsilon.$$

すなわち，$f^N(z) \in W_\varepsilon^s(f^N(x), d)$ である．よって

$$y \in f^{-N}(W_\varepsilon^s(f^N(x), d)) \subset \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(x), d))$$

が求まる．前半の等式が得られた．後半も同様にして求まる．

空間 X の上の距離関数 d と d' が**同値**（**一様同値**）であるとは (X, d) から (X, d') への恒等写像と (X, d') から (X, d) への恒等写像が連続（一様連続）であるときをいう．

定理 9·2　コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が拡大的であれば，d と同値な距離関数 D と，定数 $\gamma > 0$, $0 < \lambda < 1$, $a \geqslant 1$ が存在して

（1）　$y \in W_\gamma^s(x, D) \;\Rightarrow\; D(f^n(x), f^n(y)) \leqslant a\lambda^n D(x, y) \quad (n \geqslant 0)$

（2）　$y \in W_\gamma^u(x, D) \;\Rightarrow\; D(f^n(x), f^n(y)) \leqslant a\lambda^{-n} D(x, y) \quad (n \leqslant 0)$

が成り立つ．このような λ を**歪率**という．

証明の前に準備をしよう．

集合 Y の直積集合 $Y \times Y$ の**対角集合**を $\Delta = \{(x, x) : x \in Y\}$ とする．$Y \times Y$ の部分集合 A, B に対し，**積集合** $A \circ B$ を次のように定義する．

$$A \circ B = \{(x, y) : {}^\exists z \in Y,\ (x, z) \in A, (z, y) \in B\}$$

任意の $(x, y) \in A$ に対し，$(y, x) \in A$ を満たす集合 A は**対称集合**とよばれる．

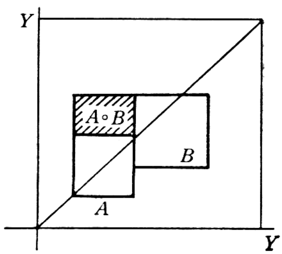


図 4·1

(X, d) は距離空間とする．直積空間 $X \times X$ の上に距離関数 $d \times d$ を

$$d \times d((x, y), (x', y')) = \max\{d(x, x'), d(y, y')\} \quad (x, x', y, y' \in X)$$

によって定義する．

補題 9·1 (Frink の定理) (X, d) は距離空間とする. V_n は $X\times X$ の対称近傍の減少列で次を満たしているとする.

$$V_0=X\times X,\ \bigcap_{n\geqq 0} V_n=\Delta$$

$$V_{n+1}\circ V_{n+1}\circ V_{n+1}\subset V_n \quad (n\geqq 0)$$

このとき, 距離関数 D が X の上に存在して, D はもとの距離関数 d に一様同値かつすべての $n\geqq 1$ に対し

$$V_n\subset \{(x, y): D(x, y)<1/2^n\}\subset V_{n-1}$$

が成り立つ.

証明 直積距離空間 $X\times X$ の上に次のように実数値関数 ξ を定義する.

$$\xi(x, y)=\begin{cases}1/2^n & (x, y)\in V_{n-1}\setminus V_n \\ 0 & (x, y)\in \Delta\end{cases} \qquad (n\geqq 1)$$

任意の $(x, y)\in X\times X$ に対し, x と y を結ぶ有限点列

$$x=x_0,\ x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}=y$$

を有限鎖とよび, このような有限鎖を $c(x, y)$ で表す. $c(x, y)$ の全体を $\mathscr{C}(x, y)$ で表し

$$D(x, y)=\inf\{\sum_i \xi(x_i, x_{i+1}): c(x, y)\in \mathscr{C}(x, y)\}$$

を定義する. このとき

(i) $\xi(x, y)\geqq D(x, y)$ $((x, y)\in X\times X)$

(ii) $D(x, y)\leqq D(x, z)+D(z, y)$ $(x, y, z\in X)$

(iii) $D(x, y)=D(y, x)$

が容易に求まる. 任意の $(x, y)\in V_n$ に対し

$$D(x, y)\leqq \xi(x, y)<1/2^n$$

であるから, $V_n\subset \{(x, y): D(x, y)<1/2^n\}$. すべての $n\geqq 1$ に対し

(iv) $\{(x, y): D(x, y)<1/2^n\}\subset V_{n-1}$

が求まれば, $D(x, y)=0$ のとき, $(x, y)\in \bigcap V_n=\Delta$ であるから, $x=y$ である. よって, (ii) と (iii) と合わせ D は X の上の距離関数である. (iv) が求まれば

$$V_n\subset \{(x, y): D(x, y)<1/2^n\}\subset V_{n-1} \quad (n\geqq 1)$$

であるから, D は d と一様同値であることがわかる.

(iv) を求めるために

(v) 任意の有限鎖 $x=x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}=y$ に対し

$$\xi(x, y)\leqslant 2\sum_{i=0}^{n}\xi(x_i, x_{i+1})$$

が成り立てばよい．何故ならば，$D(x, y)<1/2^n$ のとき，(v) より

$$\xi(x, y)\leqslant 2\inf\{\sum_i \xi(x_i, x_{i+1}) : c(x, y)\in\mathscr{C}(x, y)\}$$
$$=2D(x, y)<2\cdot 1/2^n=1/2^{n-1}$$

だから，$(x, y)\in V_{n-1}$ である．よって (iv) が成り立つ．

(v) を示すことが残されている．$n=0$ のとき，$\xi(x_0, x_1)\leqslant 2\xi(x_0, x_1)$ は明らかである．

$$\sum_{i=r}^{s-1}\xi(x_i, x_{i+1})$$

を r から s までの鎖の長さとよぶことにする．数学的帰納法を利用して，$0\leqslant k\leqslant n-1$ なる k に対して (v) が成り立つと仮定する．すなわち

$$\xi(x_0, x_k)\leqslant 2\sum_{i=0}^{k-1}\xi(x_i, x_{i+1}).$$

このとき，0 から n までの鎖の長さを a とすると，次の場合が考えられる．

(vi) $\xi(x_0, x_1)\leqslant a/2$

(vii) $\xi(x_0, x_1)>a/2$

(vi) の場合；0 から k' までの鎖の長さが $a/2$ 以下となる k' の最大数を $k\geqslant 1$ とする．このとき，$k+1$ から n までの鎖の長さは $a/2$ 以下でなくてはならない．よって，帰納法の仮定から

$$\xi(x_0, x_k)\leqslant 2\sum_{i=0}^{k-1}\xi(x_i, x_{i+1})\leqslant 2\cdot a/2=a$$
$$\xi(x_{k+1}, x_n)\leqslant a$$
$$\xi(x_k, x_{k+1})\leqslant a$$

m は $1/2^m\leqslant a<1/2^{m-1}$ を満たす自然数とすれば

$$(x_0, x_k),\ (x_k, x_{k+1}),\ (x_{k+1}, x_n)\in V_{m-1}.$$

よって

$$(x_0, x_n)\in V_{m-2}$$

である ($m-2<0$ のときは $V_{m-2}=V_0$ とする)．ゆえに

$$\xi(x_0, x_n)\leqslant 1/2^{m-1}\leqslant 2a=2\sum_{i=0}^{n-1}\xi(x_i, x_{i+1})$$

すなわち（v）が示された．

（vii）の場合；$\xi(x_0, x_1)>a/2$ より

$$\sum_{i=1}^{n-1}\xi(x_i, x_{i+1})<a/2$$

である．帰納法の仮定により

$$\xi(x_1, x_n)\leqslant 2\sum_{i=1}^{n-1}\xi(x_i, x_{i+1})<a.$$

$\xi(x_0, x_1)\leqslant a$ より

$$(x_0, x_1), (x_1, x_n)\in V_{m-1}$$

ゆえに $(x_0, x_n)\in V_{m-2}$ である．よって

$$\xi(x_0, x_n)\leqslant 1/2^{m-1}<2a=2\sum_{i=0}^{n-1}\xi(x_i, x_{i+1})$$

が成り立ち，（v）が得られる．

定数 $c>0$ は距離関数 d による f の拡大定数とし

$$W_0=X\times X$$
$$W_n=\{(x, y): d(f^i(x), f^i(y))\leqslant c, |i|<n\} \qquad (n\geqslant 1)$$

とおく．

補題 9·2 集合列 $\{W_n\}$ は $\bigcap_{n\geqslant 0} W_n=\varDelta$ を満たす減少対称近傍列である．

証明 $\{W_n\}$ は $\varDelta$ の減少対称近傍列であることは明らかである．よって $\bigcap_{n\geqslant 0} W_n\supset\varDelta$ である．$(x, y)\notin\varDelta$ とすると，ある $n\geqslant 1$ に対して $(x, y)\notin W_n$ でなくてはならない．このことは $\bigcap_{n\geqslant 0} W_n=\varDelta$ を意味している．

$U_\varepsilon(\varDelta, d)$ は $\varDelta$ を含む ε-近傍 $U_\varepsilon(\varDelta, d)=\{(x, y): d\times d((x, y), \varDelta)<\varepsilon\}$ を表す．補題9·2 により

$$W_{1+N}\subset U_{\varepsilon/3}(\varDelta, d)\subset U_\varepsilon(\varDelta, d)\subset W_1$$

を満たす $\varepsilon>0$ と $N>1$ が存在する．ここで $\varDelta$ の新しい閉近傍列 $\{V_k\}$ を

$$V_0=W_0,\quad V_k=W_{1+(k-1)N} \quad (k>0)$$

によって定義する．

補題 9·3　$\{V_n\}$ は Δ の減少対称近傍列で，任意の $n \geqslant 0$ に対し

$$V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$$

が成り立つ．

証明　明らかに

$$V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset X \times X = W_0 = V_0$$

である．ε と N の選び方と距離関数の三角不等式から

$$V_2 \circ V_2 \circ V_2 = W_{1+N} \circ W_{1+N} \circ W_{1+N} \subset W_1 = V_1$$

を得る．$k>1$ とする．$(x, y) \in V_{k+1} \circ V_{k+1} \circ V_{k+1}$ なる (x, y) に対し，z，$w \in X$ が存在して

$$(x, w),\ (w, z),\ (z, y) \in V_{k+1}$$

とできる．点 (p, q) は (x, w), (w, z), (z, y) のいずれかであるとする．このとき

$$d(f^i(p), f^i(q)) \leqslant c \qquad (|i| < 1+kN).$$

不等式 $|i| < 1+(k-1)N$, $|k| < 1+N$ から，$|i+k| < 1+kN$ が求まる．よって，$|i+k| < 1+kN$ なる整数 $i+k$ に対し

$$d(f^k \circ f^i(p), f^k \circ f^i(q)) = d(f^{k+i}(p), f^{k+i}(q)) \leqslant c$$

である．よって $(f^i(p), f^i(q)) \in V_2$．ゆえに

$$(f^i(x), f^i(y)) \in V_2 \circ V_2 \circ V_2 \subset V_1 = W_1 \quad (|i| < 1+(k-1)N).$$

すなわち，$d(f^i(x), f^i(y)) \leqslant c$ $(|i| < 1+(k-1)N)$．ゆえに $(x, y) \in V_k$ である．だから

$$V_{k+1} \circ V_{k+1} \circ V_{k+1} \subset V_k$$

が成り立つ．

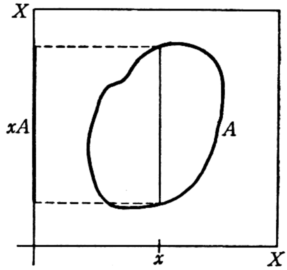


図 4·2

補題 9·4　距離関数 d と（一様）同値な距離関数 D が存在して

$$V_n \subset \{(x, y) : D(x, y) < 1/2^n\} \subset V_{n-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

とできる.

証明 補題9·1, 9·2, 9·3から明らかである.

$X\times X$ の部分集合 A に対し, X の部分集合 xA を $xA=\{y:(x,y)\in A\}$ によって定義する (図 4·2 参照).

補題 9·5 すべての $n\geqq 1$ に対し

$$f(W_c^s(x,d)\cap xW_n)=W_c^s(f(x),d)\cap f(x)W_{n+1},$$
$$f^{-1}(W_c^u(x,d)\cap xW_n)=W_c^u(f^{-1}(x),d)\cap f^{-1}(x)W_{n+1}$$

が成り立つ.

証明 最初の等式は次のようにして得られる.

$$\begin{aligned}&f(W_c^s(x,d)\cap xW_n)\\&\quad=f(\{y\in X:d(f^j(x),f^j(y))\leqq c,j>-n\})\\&\quad=\{z\in X:d(f^k\circ f(x),f^k(z))\leqq c,k>-(n+1)\}\\&\quad=W_c^s(f(x),d)\cap f(x)W_{n+1}.\end{aligned}$$

第2式も同様にして求まる.

注意 9·3 自然数Nは上のものとする. このときすべての $j\geqq 0$ と $n\geqq 1$ に対し

$$f^{Nj}(W_c^s(x,d)\cap xV_n)=W_c^s(f^{Nj}(x),d)\cap f^{Nj}(x)V_{n+j}$$
$$f^{-Nj}(W_c^u(x,d)\cap xV_n=W_c^u(f^{-Nj}(x),d)\cap f^{-Nj}(x)V_{n+j}$$

が成り立つ.

証明 補題9·5と帰納法を利用すればよい.

定理 9·2 の証明 距離関数 d と D は同値であるから, f の d による拡大定数 $c>0$ に対し

$$D(x,y)<\varepsilon_2 \quad\Rightarrow\quad d(x,y)<c$$

なる $\varepsilon_2>0$ が存在する. よって

$$W_{\varepsilon_2}^s(x,D)\subset W_c^s(x,d)$$

が成り立つ. $\varepsilon_3=\min\{\varepsilon_2,1/8\}$ とおく. このとき

$$y\in W_{\varepsilon_3}^s(x,D),\ x\neq y \quad\Rightarrow\quad D(f^{3N}(x),f^{3N}(y))<1/2\,D(x,y)$$

を示そう．$y\in W_{\varepsilon_3}{}^s(x, D)$ に対し

$$(x, y)\in V_n\setminus V_{n+1}$$

なる $n\geqslant 0$ が存在する．よって

$$(x, y)\notin V_{n+1}.$$

だから

$$1/2^{n+2}\leqslant D(x, y)\leqslant 1/8.$$

よって $n\geqslant 1$ である．$y\in W_c^s(x, d)$ そして $y\in xV_n$ であるから

$$y\in W_c^s(x, d)\cap xV_n.$$

注意9.3により

$$f^{3N}(y)\in W_c^s(f^{3N}(x), d)\cap f^{3N}(x)V_{n+3}\subset f^{3N}(x)U_{1/2^{n+3}}(\Delta, D)$$

を得る．すなわち

$$D(f^{3N}(x), f^{3N}(y))<1/2^{n+3}=1/2\cdot 1/2^{n+2}\leqslant 1/2\, D(x, y)$$

である．$L=3N$ とおき，任意の $k\geqslant 0$ に対し

$$D(f^{kL}(x), f^{kL}(y))\leqslant (1/2)^k D(x, y)$$

が帰納法によって求まる．

さて $\lambda^L=1/2$ となる λ を選ぶとき，明らかに $0<\lambda<1$ で

$$y\in W_{\varepsilon_3}{}^s(x, D) \quad\Rightarrow\quad D(f^m(x), f^m(y))\leqslant 8\lambda^m D(x, y) \quad (m\geqslant 0)$$

が成り立つ．実際に，$0\leqslant j\leqslant L-1$ なる j と任意の $k\geqslant 0$ に対し，$m=kL+j$ とする．点 $(f^{kL}(x), f^{kL}(y))$ に対し，$n\geqslant 0$ があって

$$(f^{kL}(x), f^{kL}(y))\in V_n\setminus V_{n+1},\ f^{kL}(y)\in W_c^s(f^{kL}(x), d)$$

であるから

$$f^{kL}(y)\in W_c^s(f^{kL}(x), d)\cap f^{kL}(x)W_{1+(n-1)N}.$$

$0\leqslant j\leqslant L-1$ なる j に対し，補題9.5を利用すると

$$f^{kL+j}(y)\in W_c^s(f^{kL+j}(x), d)\cap f^{kL+j}(x)W_{1+(n-1)N+j}$$

が成り立つ．すなわち

$$(f^{kL+j}(x), f^{kL+j}(y))\in W_{1+(n-1)N+j}\subset W_{1+(n-1)N}=V_n\subset U_{1/2^n}(\Delta, D),$$
$$(f^{kL}(x), f^{kL}(y))\notin V_{n+1}\supset U_{1/2^{n+2}}(\Delta, D)$$

だから

$$D(f^{kL}(x), f^{kL}(y))\geqslant 1/2^{n+2}$$

よって

$$D(f^{kL+j}(x), f^{kL+j}(y)) \leqslant 1/2^n \leqslant 4D(f^{kL}(x), f^{kL}(y)).$$

$m=kL+i$ から

$$D(f^m(x), f^m(y)) \leqslant 4D(f^{kL}(x), f^{kL}(y)) \leqslant 4(1/2)^k D(x, y)$$
$$=4\lambda^{kL}D(x, y)$$
$$<8\lambda^{kL+j}D(x, y)=8\lambda^m D(x, y)$$

が求まる．定理の（2）の証明が残っている．これは f^{-1} によって f をおきかえれば，（1）の証明と全く同様な方法で結論が得られる．

§10 極小集合と拡大性

コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f は極小集合 A をもつことが定理 4·2 で証明されている．もし f が X の上で拡大的であれば，$f_{|A}: A\to A$ も拡大的である．このとき，集合 A の位相的性質を明らかにしよう．

定理 10·1 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が拡大的であれば f の極小集合 A は完全不連結である．

証明に対し補題を準備しよう．

補題 10·1 $f^m(W^s(x, d))\cap W^s(x, d)\neq\phi$ を満たす $x\in X$ と $m>0$ が存在するならば，X は f の周期点を含んでいる．

証明 $y\in f^m(W^s(x, d))\cap W^s(x, d)$ を選び，$z=f^{-m}(y)$ とおくと，$f^m(z)\in W^s(x, d)=W^s(z, d)$ である．よって

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n\circ f^m(z), f^n(z))=0.$$

X はコンパクトであるから，部分列 $\{f^{m_n}(z)\}$ が存在して，$f^{m_n}(z)\to w(n\to\infty)$ とできる．このとき

$$d(w, f^m(w))=\lim_{n\to\infty} d(f^m\circ f^{m_n}(z), f^{m_n}(z))$$
$$=\lim_{n\to\infty} d(f^{m_n}\circ f^m(z), f^{m_n}(z))=0.$$

補題 10·2 距離空間 X はコンパクトかつ連結であるとし，A は空でない真

部分閉集合 ($\phi \neq A \subsetneq X$) とする．このとき，任意の点 $x \in A$ の A の中での連結成分 C は A の境界 ∂A と共通部分をもつ ($C \cap \partial A \neq \phi$).

証明　C を含み A に含まれる A の相対位相に関して開かつ閉集合の全体を $\mathscr{C}$ とする．このとき X はコンパクトであるから，$C = \bigcap_{K \in \mathscr{C}} K$ が成り立つ．仮に $C \cap \partial A = \phi$ とすれば，$\bigcup K^c \supset \partial A$ が求まる．∂A はコンパクトで，各 K^c は開かつ閉集合であるから，∂A は有限個の $K_i{}^c$ で被覆できる．ところで，有限共通部分 $\cap K_i = K$ はまた開かつ閉集合であるから，$\mathscr{C}$ の元である．さらに $K \cap \partial A = \phi$ である．K は A の開集合であるから，X の開集合 U があって，$U \cap A = K$ とできる．$A = \partial A \cup \mathrm{int}\,(A)$ から

$$K = U \cap A = U \cap (\partial A \cup \mathrm{int}\,(A)) = U \cap \mathrm{int}\,(A).$$

すなわち，K は X の開集合である．明らかに K は X の閉集合であるから，$X = K$ となって，$\partial A = \phi$ を得る．ゆえに $A = X$．これは矛盾である．

以後，$c > 0$ は $f: X \to X$ の拡大定数とし，$0 < \varepsilon < c/4$ なる ε を固定する．閉球 $B_\delta(x)$ に対し

$$W_\varepsilon{}^s(x, d) \cap B_\delta(x)$$

の点 x を含む連結成分を $\Sigma_\delta{}^s(x)$ で表す．同様にして

$$W_\varepsilon{}^u(x, d) \cap B_\delta(x)$$

の点 x の連結成分を $\Sigma_\delta{}^u(x)$ で表し，$B_\delta(x)$ の境界を

$$\partial B_\delta(x) = \{y \in X : d(y, x) = \delta\}$$

で表す．

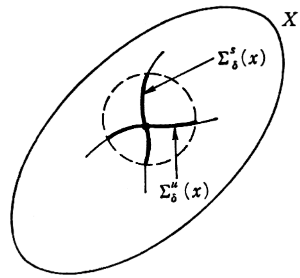


図 4・3

補題 10・3　X は定理 10・1 と同じ空間で $\dim\,(X) > 0$ とする．このとき $0 < r < \varepsilon$ なる r が存在して，$0 < \delta < r$ なるすべての δ に対し

$$\Sigma_\delta{}^s(a) \cap \partial B_\delta(a) \neq \phi$$

であるか，または

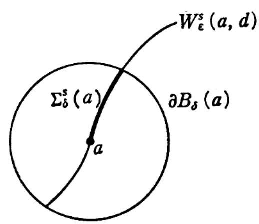


図 4・4

$$\Sigma_\delta^u(a)\cap\partial B_\delta(a)\neq\phi$$

のいずれかを満たす $a\in X$ が存在する．

証明 dim $(X)>0$ であるから，1点にならない連結成分が存在する．この成分を全空間と考え，その点 y の X での閉近傍 $B_r(y)$ の中での y の連結成分を $\Sigma_r(y)$ とする．このとき補題10・2を適用すれば

$$\Sigma_r(x)\cap\partial B_r(x)\neq\phi$$

なる点 $x\in X$ と $r>0$ がみつかる．$\Sigma_r(x)$ は連結であるから，再び補題10・2によって，$0<\delta<r$ なるすべての δ に対し

$$\Sigma_\delta(x)\cap\partial B_\delta(x)\neq\phi$$

が成り立つ．

いまから，$0<\delta<r$ なる δ が存在して，すべての $y\in X$ に対し

$$\Sigma_\delta^u(y)\cap\partial B_\delta(y)=\phi \quad\Rightarrow\quad \Sigma_\delta^s(a)\cap\partial B_\delta(a)\neq\phi$$

なる $a\in X$ の存在を示そう．そのために，コンパクトかつ連結部分集合列 Λ_n $(n\geqq 0)$ と整数列 $m_n>0$ が存在して点 $x_n\in\Lambda_n$ に対し，次を満たすものが存在することを証明する必要がある．

(1) $f^{-m_n}(x_n)=x_{n+1}$.

(2) $f^{-m_n}(\Lambda_n)\supset\Lambda_{n+1}$.

(3) $\Lambda_n\cap\partial B_\delta(x_n)\neq\phi$.

(4) $f^j(\Lambda_n)\subset B_\varepsilon(f^jx_n)\quad(0\leqq j\leqq m_{n-1})$.

このことが示されたとしよう．このとき $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ があって

$$x_{n_i}\to a\quad(i\to\infty)$$

とできる．ここで，整数列 $\{n_i\}$ を固定して

$$\Lambda=\{y\in X:\ y=\lim_{j\to\infty}y_{n_{i_j}},\ {}^\exists\{n_{i_j}\}\subset\{n_i\},\ {}^\exists y_{n_{i_j}}\in\Lambda_{n_{i_j}}\}$$

を定義する．明らかに $a\in\Lambda$ で Λ はコンパクトである．

Λ の連結性を示そう．仮に，Λ は連結でないとすると，Λ の空でない閉部分集合 F_1, F_2 が $F_1\cap F_2=\phi$，$\Lambda=F_1\cup F_2$ を満たすように選べる．いま，$a\in F_1$ としよう．F_2 の点 b に対し，点列 $b_{n_{i_j}}\in\Lambda_{n_{i_j}}$ が存在して

$$b_{n_{i_j}}\to b\quad(j\to\infty)$$

とできる．列 $\{x_{n_{i_j}}\}$ は $\{x_{n_i}\}$ の部分列であるから，$x_{n_{i_j}}\to a$ $(j\to\infty)$ である．$F_1\cap F_2=\phi$ であるから，ある $\nu>0$ に対して F_i の近傍 $U_\nu(F_i)$ が存在して

$$U_\nu(F_1)\cap U_\nu(F_2)=\phi$$

とできる．ところで，各 Λ_{n_i} は連結であるから

$$y_{n_{i_j}}\notin U_\nu(F_1)\cup U_\nu(F_2),$$
$$y_{n_{i_j}}\in \Lambda_{n_i},$$

を満たす点列 $\{y_{n_{i_j}}\}$ が存在する．X のコンパクト性より，$y_{n_{i_j}}\to y(j\to\infty)$ ゆえに $y\in\Lambda$．しかし $y\notin F_1\cup F_2=\Lambda$ となって矛盾が起こる．

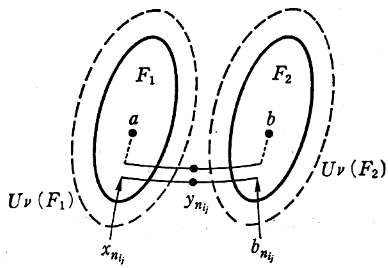


図 4·5

（4）によって

$$0\leqslant j\leqslant m_{n-1}\ \Rightarrow\ f^j(\Lambda_n)\subset B_\varepsilon(f^jx_n),$$
$$0\leqslant j\leqslant m_n\ \Rightarrow\ f^j(\Lambda_{n+1})\subset B_\varepsilon(f^jx_{n+1}).$$

（1）より，$x_n=f^{m_n}(x_{n+1})$ だから，(4) より

（5）　$f^j(\Lambda_n)\subset B_\varepsilon(f^{m_n+j}x_{n+1})\quad(0\leqslant j\leqslant m_{n-1})$

が成り立つ．（2）より，$\Lambda_n\supset f^{m_n}(\Lambda_{n+1})$．だから（5）より

$$f^{m_n+j}(\Lambda_{n+1})\subset f^j(\Lambda_n)\subset B_\varepsilon(f^{m_n+j}x_{n+1})\quad(0\leqslant j\leqslant m_{n-1}).$$

よって

（6）　$f^j(\Lambda_{n+1})\subset B_\varepsilon(f^jx_{n+1})\quad(m_n\leqslant j\leqslant m_{n-1}+m_n).$

（4）と（6）を合わせて

$$f^j(\Lambda_{n+1})\subset B_\varepsilon(f^jx_{n+1})\quad(0\leqslant j\leqslant m_{n-1}+m_n).$$

以下同様にして，任意の $n\geqslant1$ に対し

$$f^j(\Lambda_n)\subset B_\varepsilon(f^jx_n)\quad(0\leqslant j\leqslant m_0+m_1+\cdots+m_{n-1})$$

が成り立つ．$n\to\infty$ としたとき

$$f^j(\Lambda)\subset B_\varepsilon(f^ja)\quad(0\leqslant j\leqslant\infty)$$

である．よって $\Lambda\subset W_\varepsilon^s(a,d)$．（3）より，$\Lambda_n\cap\partial B_\delta(x_n)\neq\phi$ $(n\geqslant1)$．$x_{n_{i_j}}\to a(i\to\infty)$ であるから，点 y への収束点列 $y_{n_{i_j}}\in\Lambda_{n_{i_j}}\cap\partial B_\delta(x_{n_{i_j}})$ が存在して

$$\delta=\lim_{j\to\infty}d(y_{n_{i_j}},x_{n_{i_j}})=d(y,a).$$

すなわち，$\Lambda\cap\partial B_\delta(a)\neq\phi$．ゆえに補題10·2により，$\Sigma_\delta^s(a)\cap\partial B_\delta(a)\neq\phi$．

（1），（2），（3），（4）を満たすコンパクト連結部分集合列 $\{\Lambda_n\}$ を構成することが残っている．まず，$\Lambda_0=\Sigma_\delta(x)$ とおく．このとき $\Lambda_0\cap\partial B_\delta(x)\neq\phi$．任

意の $y\in X$ に対して，$\Sigma_\delta^u(y)\cap\partial B_\delta(y)=\phi$ であることに注意しよう．

いま，$\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_{n-1}$ が（1），（2），（3），（4）を満たすように構成されたと仮定する．このとき

$$\Lambda_{n-1}\not\subset W_\varepsilon^u(x_{n-1}, d)$$

を示そう．仮に $\Lambda_{n-1}\subset W_\varepsilon^u(x_{n-1}, d)$ とすると，$\Sigma_\delta^u(x_{n-1})$ は $B_\delta(x_{n-1})\cap W_\varepsilon^u(x_{n-1}, d)$ の x_{n-1} での連結成分であるから

$$\Sigma_\delta^u(x_{n-1})\supset\Lambda_{n-1}.$$

ゆえに

$$\Sigma_\delta^u(x_{n-1})\cap\partial B_\delta(x_{n-1})\supset\Lambda_{n-1}\cap\partial B_\delta(x_{n-1})\neq\phi.$$

これは矛盾である．よって

$$y\in\Lambda_{n-1}\setminus W_\varepsilon^u(x_{n-1}, d)$$

なる y に対し，$y\notin W_\varepsilon^u(x_{n-1}, d)$ から

$$\sup\{d(f^{-m}(z), f^{-m}(x_{n-1})) : z\in\Lambda_{n-1}\}\geqslant d(f^{-m}(y), f^{-m}(x_{n-1}))>\varepsilon.$$

（7）　$$\sup\{d(f^{-j}(z), f^{-j}(x_{n-1})) : z\in\Lambda_{n-1}, 0\leqslant j<m\}\leqslant\varepsilon$$

を満たす $m>0$ が存在する．この m を m_{n-1} と改め，点 x_n を次のように定義する．

$$x_n=f^{-m_{n-1}}(x_{n-1}).$$

Λ_n は $B_\delta(x_n)\cap f^{m_{n-1}}(\Lambda_{n-1})$ の x_n での連結成分とすると，（2）が成り立つ．さらに $\Lambda_n\cap\partial B_\delta(x_n)\neq\phi$．すなわち（3）が示された．（7）より，（4）が求まる．

補題 10·4　$0<\delta<\varepsilon$ を満たす任意の δ に対し，$N>0$ が存在してすべての $x\in X$ と $d(x, y)=\delta$ なるすべての $y\in W_\varepsilon^s(x, d)$ に対し

$$d(f^{-n}(y), f^{-n}(x))>\varepsilon$$

が成り立つように $0\leqslant n\leqslant N$ を選ぶことができる．

証明　命題を否定しよう．このとき $0<\delta<\varepsilon$ なる δ があって，すべての $n>0$ に対して $d(x_n, y_n)=\delta$ を満たす $x_n\in X$ と $y_n\in W_\varepsilon^s(x_n)$ が存在し，$0\leqslant j\leqslant n$ を満たすどんな j に対しても

$$d(f^{-j}(x_n), f^{-j}(y_n))\leqslant\varepsilon$$

とできる．$x_n \to x$．$y_n \to y$ $(n\to\infty)$ とすれば

$$y \in W_\varepsilon^s(x,d),\quad d(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \leqslant \varepsilon \quad (j \geqslant 0)$$

であるから，すべての $j \in \boldsymbol{Z}$ に対し，$d(f^j(x), f^j(y)) \leqslant \varepsilon$ である．f は拡大的であるから $x=y$ である．これは $d(x,y)=\delta>0$ に矛盾する．

補題 10·5　任意の $x \in X$ に対し，$\delta_0>0$ が存在して $0<\delta<\delta_0$ なる任意の δ に対し

$$W_\varepsilon^s(x,d) \cap B_\delta(x) = W_{2\varepsilon}^s(x,d) \cap B_\delta(x)$$

が成り立つ．

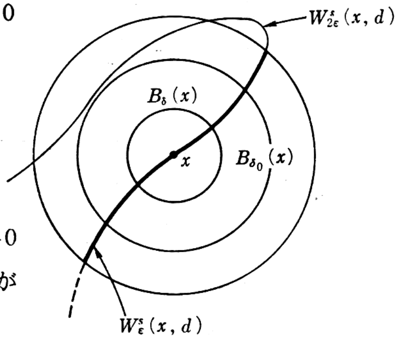


図 4·6

証明　命題を否定したとき，すべての $n>0$ に対し $x_n \in X$ と $0<\delta_n<1/n$ を満たす δ_n が存在して

$$W_\varepsilon^s(x_n,d) \cap B_{\delta_n}(x_n) \neq W_{2\varepsilon}^s(x_n,d) \cap B_{\delta_n}(x_n)$$

とできる．ゆえに

$$d(x_n, y_n) \to 0 \quad (n\to\infty), d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}y_n)) > \varepsilon, m \to \infty \quad (n\to\infty)$$

なる $y_n \in W_{2\varepsilon}^s(x_n,d)$ と整数 $m_n>0$ が存在する．$y_n \in W_{2\varepsilon}^s(x_n,d)$ から，$-m_n < m$ なるすべての m に対し

$$d(f^m \circ f^{m_n}(x_n), f^m \circ f^{m_n}(y_n)) \leqslant 2\varepsilon$$

である．$f^{m_n}(x_n) \to x$，$f^{m_n}(y_n) \to y$ $(n\to\infty)$ としたとき

$$d(f^m(x), f^m(y)) \leqslant 2\varepsilon \quad (m \in \boldsymbol{Z}).$$

f の拡大性によって，$x=y$ を得る．しかし $d(x,y) \geqslant \varepsilon$．これは矛盾である．

正の実数 $\bar{\varepsilon}$ を

$$\bar{\varepsilon} = \inf\{d(x,y) : d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) > \varepsilon, (x, y \in X)\}$$

によって定義する．

補題 10·6　$\dim(X)>0$ とし，δ_0 は補題10·5のものとする．

$$0<\delta<\min\{\delta_0,\ \bar{\varepsilon}/3\}$$

なる δ に対し，整数 $N=N(\delta)>0$ が存在して，任意の $x\in X$ に対し Λ は x を含む $W_\varepsilon^s(x,d)$ のコンパクト連結成分で

$$\Lambda\cap\partial B_\delta(x)\neq\phi$$

を満たすとするとき，$0<m<N$ と点 $\alpha,\beta\in f^{-m}(\Lambda)$ とコンパクト連結集合 Λ_α, Λ_β が次をを満たすように選べる．

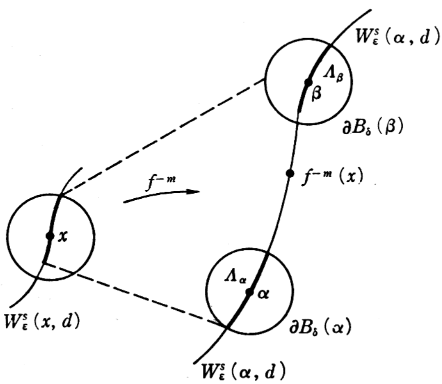


図 4·7

（1）　$\alpha\in\Lambda_\alpha$,　$\beta\in\Lambda_\beta$,　$\alpha\in W_{2\varepsilon}^s(\beta,d)$.

（2）　$\Lambda_\alpha\cap\partial B_\delta(\alpha)\neq\phi$,　$\Lambda_\beta\cap\partial B_\delta(\beta)\neq\phi$.

（3）　$\inf\{d(z,w): z\in B_\delta(\alpha),\ w\in B_\delta(\beta)\}>\delta$.

（4）　$\Lambda_\alpha\subset W_\varepsilon^s(\alpha,d)\cap B_\delta(\alpha)$,　$\Lambda_\beta\subset W_\varepsilon^s(\beta,d)\cap B_\delta(\beta)$.

証明　$N(\delta)=N>0$ は補題10·4のものとする．仮定によって，$\partial B_\delta(x)\cap\Lambda\neq\phi$, $x\in\Lambda\subset W_\varepsilon^s(x,d)$ であるから，$d(y,x)=\delta$ なる $y\in W_\varepsilon^s(x,d)$ に対し

（5）　$\sup\{d(f^{-(m+1)}(z), f^{-(m+1)}(x)): z\in\Lambda\}$
$$\geqq d(f^{-(m+1)}(y), f^{-(m+1)}(x))>\varepsilon,$$

（6）　$\sup\{d(f^{-j}(z), f^{-j}(x)): z\in\Lambda, 0\leqq j\leqq m\}\leqq\varepsilon$.

が成り立つように $0\leqq m\leqq N-1$ をみつけることができる．（6）と仮定 $\Lambda\subset W_\varepsilon^s(x,d)$ より

（7）　$f^{-m}(\Lambda)\subset W_\varepsilon^s(f^{-m}(x),d)$

が求まる．明らかに $f^{-m}(x)\in f^{-m}(\Lambda)$．よって，任意の $w\in f^{-m}(\Lambda)$ に対し

（8） $f^{-m}(x)\in W_\varepsilon^s(w,d)$

である．何故ならば，$f^m(w)\in\Lambda$ と（6）より

$$d(f^{-j}\circ f^m(w),f^{-j}(x))\leqslant\varepsilon\quad(0\leqslant j\leqslant m).$$

$i=-j+m$ とすると

（9） $d(f^i(w),f^i\circ f^{-m}(x))\leqslant\varepsilon\quad(0\leqslant i\leqslant m).$

$f^m(w)\in\Lambda\subset W_\varepsilon^s(x,d)$ より，すべての $k\geqslant 0$ に対し

$$d(f^k\circ f^m(w),f^k(x))\leqslant\varepsilon$$

が成り立つ．$i=k+m$ とすると，すべての $i\geqslant m$ に対し

(10) $d(f^i(w),f^i\circ f^{-m}(x))\leqslant\varepsilon$

である．ゆえに（9）と (10) より，$f^{-m}(x)\in W_\varepsilon^s(w,d)$ である．

（7)，（8）より，任意の $w\in f^{-m}(\Lambda)$ に対し

(11) $f^{-m}(\Lambda)\subset W_{2\varepsilon}^s(w,d)$

が求まる．（5）より，$z\in\Lambda$ が存在して

$$d(f^{-1}\circ f^{-m}(z),\ f^{-1}\circ f^{-m}(x))>\varepsilon$$

とできるから，$\bar\varepsilon$ の定義によって，

$$d(f^{-m}(z),f^{-m}(x))\geqslant\bar\varepsilon.$$

$z,x\in\Lambda$ に注意すれば

$$\mathrm{diam}\ (f^{-m}(\Lambda))\geqslant\bar\varepsilon.$$

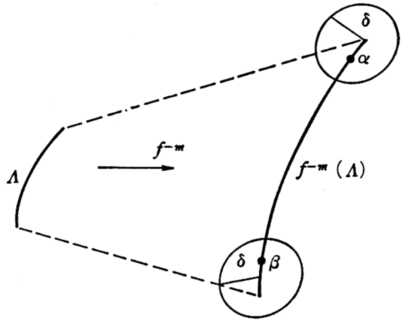


図 4・8

$3\delta<\bar\varepsilon$ であるから，$d(\alpha,\beta)>2\delta$ を満たすように $\alpha,\beta\in f^{-m}(\Lambda)$ をみつけることができる．明らかに，$\alpha\notin B_\delta(\beta)$, $\beta\notin B_\delta(\alpha)$ である．よって，（3）が成り立つ．$\Lambda_\alpha,\Lambda_\beta$ はそれぞれ $f^{-m}(\Lambda)\cap B_\delta(\alpha)$，$f^{-m}(\Lambda)\cap B_\delta(\beta)$ の中の α,β の連結成分とする．補題10・2 より，（2）が成り立つ．（7）より（1）が求まる．$\Lambda_\alpha\subset f^{-m}(\Lambda)$，$\Lambda_\beta\subset f^{-m}(\Lambda)$ および (11) より，$\Lambda_\alpha\subset W_{2\varepsilon}^s(\alpha,d)$, $\Lambda_\beta\subset W_{2\varepsilon}^s(\beta,d)$．よって

$$\Lambda_\alpha\subset W_{2\varepsilon}^s(\alpha,d)\cap B_\delta(\alpha),\quad \Lambda_\beta\subset W_{2\varepsilon}^s(\beta,d)\cap B_\delta(\beta).$$

補題10・5 により，（4）が成り立つ．

定理 10・1 の証明 $f:X\to X$ が拡大的で，X は f の極小集合であるとき，X

は完全不連結であることを証明すれば十分である．

実数 $r>0$ は補題 10·3，$N(\delta)=N>0$ は補題 10·4，$\delta_0>0$ は補題 10·5 のものとする．正数 $\bar{\varepsilon}$ を補題 10·6 の直前に定義したものとする．

$$0<\delta<\min\{\delta_0, \bar{\varepsilon}/2, r\}$$

なる δ に対し

$$r_1=\inf\{d(f^i(x), f^j(y)) : y\in W_{4\varepsilon}^s(x, d),\\ d(x, y)\geqslant\delta, 0\leqslant i, j\leqslant N(\delta)\}$$

とおく．$r_1=0$ の場合，X は有限集合である．よって定理は成り立つ．

何故ならば，任意の $n\geqslant 0$ に対し

$$y_n\in W_{4\varepsilon}^s(x_n, d),\ d(x_n, y_n)\geqslant\delta,\ d(f^{i_n}(x_n), f^{j_n}(y_n))\to 0\quad(n\to\infty)$$

を満たす $x_n, y_n\in X$ と 整数 $0\leqslant i_n, j_n\leqslant N(\delta)$ が存在する．よって，ある $0\leqslant i\leqslant N(\delta)$ が存在して無限個の $i_{n'}$ が i と一致する列 $\{i_{n'}\}$ を考え，列 $\{j_n\}$ の部分列 $\{j_{n'}\}$ の中から，上と同じようにして無限個の $j_{n''}$ が j と一致する列 $\{j_{n''}\}$ を選ぶ．列 $\{n''\}$ は列 $\{n'\}$ の部分列である．簡単にするために，n'' を n で表すことにする．X はコンパクトであるから

$$x_n\to x,\quad y_n\to y\quad(n\to\infty)$$

としてよい．ゆえに

$$y\in W_{4\varepsilon}^s(x, d),\quad d(x, y)\geqslant\delta,\quad f^j(x)=f^i(y)$$

である．よって，$i\neq j$ である．$j-i>0$ としよう．このとき

$$f^{j-i}(x)=y\in W_{4\varepsilon}^s(x, d)\subset W^s(x, d).$$

さらに，$f^{j-i}(x)\in f^{j-i}(W^s(x, d))$ より

$$f^{j-i}(W^s(x, d))\cap W^s(x, d)\neq\phi.$$

補題 10·1 より，X に周期点 x_0 が存在する．軌道 $O_f(x_0)$ は有限集合かつ $f: X\to X$ は極小的であるから，$O_f(x_0)=X$ である．

$r_1>0$ の場合，まず次を示そう．

コンパクト連結集合の列 Λ_n と点列 $x_n\in\Lambda_n$，さらに開集合 $U\subset X$ が存在して

(a)　$\Lambda_n\cap\partial B_\delta(x_n)\neq\phi$.

(b)　$\Lambda_n\subset W_\varepsilon^s(x_n)$.

(c)　$0\leqslant m_n\leqslant N(\delta)$ なる m_n が存在して，$f^{-m_n}(\Lambda_n)\supset\Lambda_{n+1}$.

（d）　$0\leqslant j\leqslant m_n$ なるすべての j に対し，$f^j(\Lambda_n)\cap U=\phi$.

を満たすようにできる.

$\delta<r$ であるから，補題10·3より $\Sigma_\delta{}^s(a)\cap\partial B_\delta(a)\neq\phi$ を満たす $a\in X$ が存在する．いま

$$x_0=a,\ \ \Lambda_0=\Sigma_\delta{}^s(x_0)$$

とおく．このとき $U\cap\Lambda_0=\phi$, $\mathrm{diam}(U)<r_1/2$ を満たす X の開部分集合 $U\neq\phi$ が存在することを示そう.

どんな開集合 $U\neq\phi$ に対しても，$U\cap\Lambda_0\neq\phi$ とすると，Λ_0 は X で稠密となる．しかし，Λ_0 は閉集合であるから，$\Lambda_0=X$ である．$\mathrm{diam}\,(\Lambda_0)\leqslant 2\delta$ より，f の拡大性を使って X は1点集合となる．これは $\dim(X)>0$ に反する.

$m_0=0$ とすると，Λ_0 は（a），（b），（d）を満たす．（c）を満たすように，Λ_1 を構成しよう．$\Lambda_0\cap\partial B_\delta(x_0)\neq\phi$, $\Lambda_0\subset W_\varepsilon{}^s(x_0,d)$ であるから，補題10·6を使うことができる．よって，$0<m_1<N(\delta)$, $\alpha,\beta\in f^{-m_1}(\Lambda_0)$, コンパクト連結集合 $\Lambda_\alpha,\Lambda_\beta$ が存在して

（1）　$\alpha\in\Lambda_\alpha$, $\beta\in\Lambda_\beta$, $\alpha\in W_{2\varepsilon}{}^s(\beta,d)$.

（2）　$\Lambda_\alpha\cap\partial B_\delta(\alpha)\neq\phi$, $\Lambda_\beta\cap\partial B_\delta(\beta)\neq\phi$.

（3）　$\inf\{d(z,w):z\in B_\delta(\alpha),w\in B_\delta(\beta)\}>\delta$.

（4）　$\Lambda_\alpha\subset W_\varepsilon{}^s(\alpha,d)\cap B_\delta(\alpha)$, $\Lambda_\beta\subset W_\varepsilon{}^s(\beta,d)\cap B_\delta(\beta)$.

が成り立つ．さらに

（5）　$U\cap\{\bigcup_{j=0}^{m_1}f^j(\Lambda_\alpha)\}\neq\phi\ \ \Rightarrow\ \ U\cap\{\bigcup_{j=0}^{m_1}f^j(\Lambda_\beta)\}=\phi$.

が求まる.

（5）は次のようにして得られる．$y\in U\cap\{\bigcup_{j=1}^{m_1}f^j(\Lambda_\beta)\}$ とすると，$0\leqslant j\leqslant m_1$ なる j に対し，$y\in f^j(\Lambda_\beta)$ である．よって，$f^j(z)=y$ なる $z\in\Lambda_\beta$ が存在する．一方，（5）の仮定より，$0\leqslant i\leqslant m_1$ なる i があって $x\in U\cap f^i(\Lambda_\alpha)$ なる点 x に対し，$w\in\Lambda_\alpha$ が存在して，$f^i(w)=x$ である．$x,y\in U$ より

（6）　$d(f^i(w),f^j(z))=d(x,y))<r_1/2$.

$w\in\Lambda_\alpha, z\in\Lambda_\beta$ より

$$d(w,z)>\delta\quad ((4)\text{ と }(3)\text{ によって})$$

（4）より $w\in W_\varepsilon{}^s(\alpha,d)$, $z\in W_\varepsilon{}^s(\beta,d)$．（1）より $\alpha\in W_{2\varepsilon}{}^s(\beta,d)$．ゆえに

$$w \in W_{\epsilon_1}^s(z, d).$$

しかし r_1 の定義より，$d(f^i(w), f^j(z)) = d(x, y) \geqq r_1$ となって，（6）に矛盾する．

Λ_β は $f^{-m_1}(\Lambda_0) \cap B_\delta(\beta)$ に含まれる点 β の連結成分とし，開集合 U に対して（5）の場合のときには，$x_1 = \beta$，$\Lambda_1 = \Lambda_\beta$ とおく．このとき

（1）′ $\Lambda_1 \cap \partial B_\delta(x_1) \neq \phi$ （（2）より）

（2）′ $\Lambda_1 \subset W_\epsilon^s(x_1, d)$ （（4）より）

（3）′ $\Lambda_1 \subset f^{-m_1}(\Lambda_0)$

（4）′ $\{\bigcup_{j=0}^{m_1} f^j(\Lambda_1)\} \cap U = \phi$ （（5）より）

が成り立つ．

Λ_0 を Λ_1 におきかえて，上と同じ方法をくりかえすとき

$$\Lambda_2 \subset f^{-m_2}(\Lambda_1)$$

を満たすコンパクト連結集合 Λ_2 と $m_2 > 0$ が存在し，Λ_1 を Λ_2 に，点 x_1 を Λ_2 のある点 x_2 におきかえるとき，（1）′，（2）′，（3）′，（4）′ を満たすようにできる．

帰納的に，このことをくりかえすとき，（a），（b），（c），（d）を満たすようにコンパクト連結集合の列 $\{\Lambda_n\}$ がとれて

$$\Lambda_0 \supset f^{m_1}(\Lambda_1) \supset f^{m_1+m_2}(\Lambda_2) \supset \cdots \supset f^{m_1+\cdots+m_n}(\Lambda_n) \supset \cdots$$

が成り立つ．X はコンパクトであるから

$$\bigcap_{n \geqq 1} f^{m_1+\cdots+m_n}(\Lambda_n) \neq \phi.$$

だから，その集合から1点 p を選ぶと，$f^{-m_1}(p) \in \Lambda_1$．（4）′ より，$f^{-m_1+j}(p) \notin U (0 \leqq j \leqq m_1)$ であるから

$$f^{-i}(p) \notin U \quad (0 \leqq i \leqq m_1)$$

が求まる．$f^{-(m_1+m_2)}(p) \in \Lambda_2$ と（4）′ より，$f^{-(m_1+m_2)+j}(p) \notin U \quad (0 \leqq j \leqq m_2)$ であるから

$$f^{-i}(p) \notin U \quad (0 \leqq i \leqq m_1 + m_2)$$

が得られる．これをくりかえすとき，すべての $n \geqq 0$ に対し，$f^{-n}(p) \notin U$ が成り立ち，片側の軌道 $O_f^-(p)$ は X で稠密ではない．しかし，f は極小的であるから，注意4·1によって $X = \overline{O_f^-(p)}$ である．いま矛盾が導びかれた．

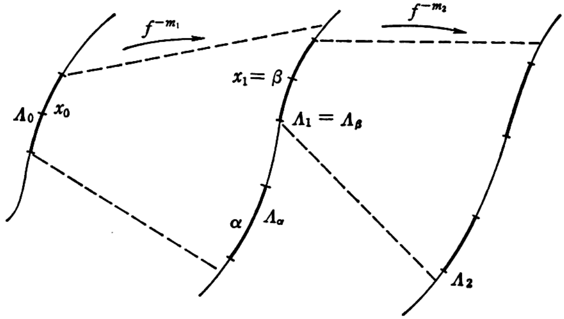


図 4·9

§ 11 擬軌道追跡性

距離空間 (X, d) の上の同相写像を f とする．δ は正数とする．X の点列 $\{x_i : i\in \boldsymbol{Z}\}$ が f の δ-**軌道**であるとは，$d(f(x_i), x_{i+1})<\delta(i\in \boldsymbol{Z})$ を満たすときをいう．f が**擬軌道追跡性**を満たすとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，f の任意の δ-軌道 $\{x_i : i\in \boldsymbol{Z}\}$ に対し X の点 y があって，$d(f^i(y), x_i)<\varepsilon$ がすべての $i\in \boldsymbol{Z}$ に対して成り立つときをいう．このような点 y を ε-**追跡点**という．

自然現象を相空間 X の上のある同相写像 f の形でとらえる立場に立つと，その同相写像 f は擬軌道追跡性をもっていることを仮定する場合が多い．例えば，現象の変化 $x\mapsto f(x)$ そのものを観測できず，$x\mapsto x_1$ なる観測は $d(f(x), x_1)$ が十分小さいという形をとり，この観測を精密にすればするほど $f(x)$ に近いものだと思っているのは，観測値 $\{x, x_1, x_2, \cdots\}$ が軌道とあまりちがわないこと，すなわち，ε-追跡されていることを仮想しているのに他ならない．

いまから擬軌道追跡性の基本的な性質を調べよう．

注意 11·1 d, d' は X の上の距離関数とし，一様同値であるとする．このとき，同相写像 f に対し，f が (X, d) の上で擬軌道追跡性をもつことと，(X, d') の上で f が擬軌道追跡性をもつことは同値であることが定義より得られる．

定理 11·1 k は自然数とする．このとき，f が擬軌道追跡性をもつならば，

f^k もその性質をもつ．

証明　任意の $\varepsilon>0$ に対し，f の任意の δ-軌道 $\{x_i\}$ が f によって ε-追跡されるように $\delta>0$ を選ぶことができる．このとき，f^k の任意の δ-軌道 $\{y_i\}$ は f^k によって ε-追跡されることを示そう．$0\leqslant j<k$ なる j に対し

$$x_{nk+j}=f^j(y_n)\quad(n\in\boldsymbol{Z})$$

とおく．このとき，$\{x_i\}$ は f の δ-軌道である．よって，ある $y\in X$ が f によって $\{x_i\}$ を ε-追跡する．すなわち

$$d(f^i(y),x_i)<\varepsilon\quad(i\in\boldsymbol{Z}).$$

特に，$i=nk$ に対し

$$d((f^k)^n(y),y_n)=d(f^{kn}(y),x_{nk})<\varepsilon\ (n\in\boldsymbol{Z})$$

であるから，点 y は $\{y_k\}$ を f^k によって ε-追跡している．

補題 11·1　f は一様連続な同相写像とし，自然数 $N>0$ を固定する．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対し，f の任意の δ-有限軌道 $\{x_i:0\leqslant i\leqslant N\}$ は

$$d(f^i(x_0),x_i)<\varepsilon\quad(0\leqslant i\leqslant N)$$

を満たすように $\delta>0$ を選ぶことができる．

証明　$N=0$ のときは明らかである．帰納法で証明しよう．

N-1 のとき命題は正しいと仮定する．f は一様連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$d(x,y)<\varepsilon_1\ \Rightarrow\ d(f(x),f(y))<\varepsilon/2\quad(x,y\in X)$$

なる $\varepsilon_1>0$ が存在する．この場合 $\varepsilon_1<\varepsilon$ となるように ε_1 を選ぶことができる．ε_1 に対し帰納法の仮定により，$\delta_1>0$ が存在して f の任意の δ_1-軌道 $\{x_i:0\leqslant i\leqslant N-1\}$ は点 x_0 で ε_1-追跡される．ここに δ_1 は $\delta_1<\varepsilon$ としてよい．このとき，f の任意の $\delta_1/2$-軌道 $\{x_i:0\leqslant i\leqslant N\}$ が f によって点 x_0 で ε-追跡されることを示そう．

$\delta_1/2$-軌道 $\{x_i:0\leqslant i\leqslant N-1\}$ は明らかに δ_1-軌道であるから，$\{x_i:0\leqslant i\leqslant N-1\}$ は点 x_0 で ε_1-追跡される．よって

$$d(f^i(x_0),x_i)<\varepsilon_1<\varepsilon\quad(0\leqslant i\leqslant N-1).$$

特に，$d(f^{N-1}(x_0),x_{N-1})<\varepsilon_1$ である．だから

$$d(f\circ f^{N-1}(x_0), f(x_{N-1}))<\varepsilon/2.$$

一方，$\{x_i : 0\leqslant i\leqslant N\}$ は $\delta_1/2$-軌道であるから

$$d(f(x_{N-1}), x_N)<\delta_1/2<\varepsilon/2.$$

ゆえに $d(f^N(x_0), x_N)<\varepsilon$ を得る．

定理 11·2　距離空間 (X, d) の上の同相写像 f は一様連続であるとし，k は自然数とする．このとき f^k が擬軌道追跡性をもてば f もその性質をもつ．

証明　$\varepsilon>0$ は任意とする．

（1）　$\varepsilon>\varepsilon_1>0$ なる ε_1 が存在して，次の（i），(ii) を満たすようにできる．

（i）　f の任意の ε_1-軌道 $\{x_i : 0\leqslant i\leqslant k\}$ は補題 11·1 により

$$d(f^i(x_0), x_i)<\varepsilon/2 \quad (0\leqslant i\leqslant k)$$

を満たし，かつ

(ii)　$d(x, y)<\varepsilon_1 \quad\Rightarrow\quad \max\{d(f^i(x), f^i(y)) : 0\leqslant i\leqslant k\}<\varepsilon/2.$

（2）　上の ε_1 に対し $\delta_1>0$ が存在し，f^k の任意の δ_1-軌道はある点で ε_1-追跡される．

（3）　上の δ_1 に対し $\varepsilon_1>\delta>0$ なる δ が存在し，f の任意の δ-有限軌道 $\{z_i : 0\leqslant i\leqslant k\}$ は点 z_0 で δ_1-追跡される（補題 11·1）

以上の準備のもとで，f の任意の δ-軌道 $\{y_i : i\in \boldsymbol{Z}\}$ は f によって ε-追跡されることを示そう．いま

$$x_i=y_{ki} \quad (i\in \boldsymbol{Z})$$

とおく．$i\in \boldsymbol{Z}$ を固定したとき $\{y_{ki+j} : 0\leqslant j\leqslant k\}$ は f の δ-有限軌道であるから，（3）により

$$d(f^j(y_{ki}), y_{ki+j})<\delta_1 \quad (0\leqslant j\leqslant k).$$

特に，$j=k$ のとき

$$d(f^k(y_{ki}), y_{ki+k})=d(f^k(x_i), x_{i+1})<\delta_1$$

が成り立つ．すなわち，$\{x_i\}$ は f^k の δ_1-軌道である．よって（2）から

$$d(f^{ki}(y), x_i)<\varepsilon_1 \quad (i\in \boldsymbol{Z})$$

なる点 $y\in X$ が存在する．すなわち

$$d(f^{ki}(y), y_{ki})<\varepsilon_1 \quad (i\in \boldsymbol{Z}).$$

一方，$\{y_{ki+j}: 0 \leqslant j \leqslant k\}$ は f の ε_1-軌道でもあるから，（1）の（i）により

$$d(f^j(y_{ki}), y_{ki+j}) < \varepsilon/2 \quad (0 \leqslant j \leqslant k).$$

（1）の（ii）から

$$d(f^{ki+j}(y), f^j(y_{ki})) < \varepsilon/2 \quad (0 \leqslant j \leqslant k).$$

ゆえに

$$d(f^{ki+j}(y), y_{ki+j}) < \varepsilon \quad (0 \leqslant j \leqslant k).$$

i は任意であるから

$$d(f^n(y), y_n) < \varepsilon \quad (n \in \boldsymbol{Z})$$

である．よって，点 y は δ-軌道 $\{y_n\}$ を ε-追跡する．

定理 11·3 距離空間 (X, d) の上の同相写像 f は一様連続であるとする．このとき，f が擬軌道追跡性をもてば，逆写像 f^{-1} もその性質をもつ．

証明 仮定によって，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ があって，f の任意の δ-軌道 $\{x_i\}$ は f によって点 y で ε-追跡される．この δ に対し

$$d(x, y) < \delta' \ \Rightarrow \ d(f(x), f(y)) < \delta$$

なる $\delta'>0$ を選ぶことができる．$g=f^{-1}$ とおくとき，g の任意の δ'-軌道 $\{y_i\}$ が g によって ε-追跡されることを示せばよい．

任意の $i \in \boldsymbol{Z}$ に対し

$$d(g(y_i), y_{i+1}) < \delta'$$

であるから

$$d(y_i, f(y_{i+1})) < \delta \quad (i \in \boldsymbol{Z}).$$

ここで

$$x_i = y_{-i} \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

とおくと，$\{x_i\}$ は f の δ-軌道である．よって，f の ε-追跡点 $y \in X$ が存在する．すなわち

$$d(f^i(y), x_i) < \varepsilon \quad (i \in \boldsymbol{Z}).$$

だから，すべての $i \in \boldsymbol{Z}$ に対し $d(f^{-i}(y), x_{-i}) < \varepsilon$ である．よって

$$d(g^i(y), y_i) < \varepsilon \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

である．

定理 11·4　写像 f, h は距離空間 (X, d) の上の同相写像とする．特に，h と h^{-1} は一様連続であるとし，

$$g = h \circ f \circ h^{-1}$$

とおく．このとき，f が擬軌道追跡性をもつための必要十分条件は g もその性質をもつことである．

証明　任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$d(x, y) < \varepsilon' \Rightarrow d(h(x), h(y)) < \varepsilon$$

なる $\varepsilon'>0$ が存在する．この ε' に対し $\delta'>0$ があって f の任意の δ'-軌道 $\{x_i\}$ は f によって ε'-追跡される．この δ' に対し $\delta>0$ が存在して

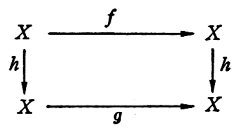


図 4·10

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \delta'$$

とできる．このとき，g の任意の δ-軌道 $\{y_i\}$ は g によって ε-追跡されることを示そう．そのために

$$x_i = h^{-1}(y_i) \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

とおく．$d(g(y_i), y_{i+1}) < \delta$ $(i \in \boldsymbol{Z})$ であるから

$$d(h^{-1} \circ g(y_i), h^{-1}(y_{i+1})) < \delta'.$$

すなわち

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta' \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

である．よって，$\{x_i\}$ は f の δ'-軌道である．ゆえに点 $y \in X$ が存在して

$$d(f^i(y), x_i) < \varepsilon' \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

だから，$d(h \circ f^i(y), h(x_i)) < \varepsilon$．すなわち

$$d(g^i \circ h(y), y_i) < \varepsilon \quad (i \in \boldsymbol{Z}).$$

ゆえに $h(y)$ が $\{y_i\}$ の g による ε-追跡点である．逆は明らかである．

定理 11·5　距離空間 $(X, d), (X', d')$ の直積空間 $X \times X'$ の上の距離関数 d'' を

$$d''((x, x'), (y, y')) = \max\{d(x, y), d'(x', y')\}$$

によって定義し，同相写像 $f: X \to X$，$g: X' \to X'$ に対し，$X \times X'$ の上の同相

写像 $f\times g$ を

$$f\times g(x,x')=(f(x),g(x'))\quad((x,x')\in X\times X')$$

によって定義する．このとき，$f\times g$ が擬軌道追跡性をもつための必要十分条件は f と g ともに擬軌道追跡性をもつことである．

証明　$f\times g$ が擬軌道追跡性をもつとする．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して，$f\times g$ の任意の δ-軌道は $f\times g$ によって ε-追跡される．いま，$\{x_i\}$ は f の δ-軌道，$\{x_i'\}$ は g の δ-軌道とする．明らかに，$\{(x_i,x_i')\}$ は $f\times g$ の δ-軌道である．ゆえに，点 $(y,y')\in X\times X'$ が存在して

$$d''((f\times g)^i(y,y'),(x_i,x_i'))<\varepsilon\quad(i\in\boldsymbol{Z})$$

が成り立つ．よって

$$d(f^i(y),x_i)<\varepsilon,\ d'(g^i(y'),x_i')<\varepsilon\quad(i\in\boldsymbol{Z}).$$

ゆえに，f と g はともに擬軌道追跡性をもつ．逆はまったく同様にして証明できる．

距離空間の任意の有界集合 A の閉包 $\bar{A}$ がコンパクトであるとき，A は**相対コンパクト**であるという．ユークリッド空間のすべての有界集合は相対コンパクトである．次の補題は後で時々使うので証明を与えておく．

補題 11·2　(X,d) を距離空間とし，Xの任意の有界集合は相対コンパクトであるとする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，任意の $k>0$ と f の任意の δ-軌道 $\{x_i:0\leqslant i\leqslant k\}$ が f によって ε-追跡されれば，f は擬軌道追跡性をもつ．

証明　$\{x_i:i\in\boldsymbol{Z}\}$ が f の δ-軌道であるとき，f によって $\{x_i\}$ は ε-追跡されることを示せばよい．任意の自然数 k を固定し

$$z_i=x_{i-k}\quad(0\leqslant i\leqslant 2k)$$

とおく．明らかに，$\{z_i:0\leqslant i\leqslant 2k\}$ は f の δ-軌道である．よって，$z=z(k)\in X$ が存在して

$$d(f^i(z),z_i)<\varepsilon\quad(0\leqslant i\leqslant 2k).$$

さて，$y(k)=f^k(z)$ とおくと

$$d(f^i(y(k)),x_i)<\varepsilon\quad(-k\leqslant i\leqslant k).$$

$\{y(k)\}_k$ は有界点列であるから，$y(k_n)\to x$ $(n\to\infty)$ なる収束点列 $\{y(k_n)\}$ が存在する．任意の $i\in\boldsymbol{Z}$ に対し，$n_0>0$ があって，$k_n\geqslant|i|(n\geqslant n_0)$ なる k_n に対し

$$d(f^i(y(k_n)),x_i)<\varepsilon$$

である．よって，$n\to\infty$ とすると $d(f^i(x),x_i)\leqslant\varepsilon$ を得る．i は任意であるから，点 x は f による $\{x_i\}$ の ε-追跡点である．

注意 11·2 (X,d) はコンパクト距離空間とする．X_i を X のコピー（$X_i=X, i\in\boldsymbol{Z}$）とし，直積空間 $\tilde{X}=\times_{-\infty}^{\infty}X_i$ の上の距離関数 $\tilde{d}$ を

$$\tilde{d}(x,y)=\max\{d(x_i,y_i)/2^{|i|}:i\in\boldsymbol{Z}\}\quad(x=(x_i),y=(y_i)\in\tilde{X})$$

によって定義する．$(\tilde{X},\tilde{d})$ はコンパクト距離空間である．このとき，$\tilde{X}$ の上の推移写像 σ （$\sigma(x_i)=(y_i), y_i=x_{i+1}, i\in\boldsymbol{Z}$）は擬軌道追跡性をもつ．

証明 $\tilde{X}$ の上の推移写像 σ は同相写像であることに注意する．任意の $\varepsilon>0$ を固定し，$\delta>0$ は $2\delta<\varepsilon$ を満たす実数とする．σ の任意の δ-軌道 $\{x^i:i\in\boldsymbol{Z}\}$ と任意の $i\in\boldsymbol{Z}$ に対し

$$\delta>\tilde{d}(\sigma(x^i),x^{i+1})\geqslant d(\sigma(x^i)_k,x_k{}^{i+1})/2^{|k|}=d(x_{k+1}{}^i,x_k{}^{i+1})/2^{|k|}$$

がすべての $k\in\boldsymbol{Z}$ に対して成り立つ．よって

$$d(x_{k+1}{}^i,x_k{}^{i+1})<2^{|k|}\delta\quad(i,k\in\boldsymbol{Z})$$

である．いま

$$x=(\cdots,x_0{}^{-1},x_0{}^0,x_0{}^1,x_0{}^2,\cdots)$$

とおくと $x\in\tilde{X}$，かつ

$$(\sigma^i x)_k=x_0{}^{i+k}\quad(i,k\in\boldsymbol{Z})$$

である．$k\geqslant0$ のとき

$$d(x_k{}^i,x_0{}^{i+k})\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}d(x_{k-j}{}^{i+j},x_{k-j-1}{}^{i+j+1})\leqslant2^{k+1}\delta$$

が成り立つ．$k<0$ のときは

$$d(x_k{}^i,x_0{}^{i+k})\leqslant2^{|k|+1}\delta$$

である．ゆえに，任意の $i\in\boldsymbol{Z}$ に対し

$$d(x^i,\sigma^i(x))=\max\{d(x_k{}^i,(\sigma^i x)_k)/2^{|k|}:k\in\boldsymbol{Z}\}\leqslant2\delta<\varepsilon$$

ゆえに，点 $x\in\tilde{X}$ が δ-軌道 $\{x^i\}$ の ε-追跡点である．

$Y_k^{\mathbf{Z}}$の上の推移写像 σ は擬軌道追跡性をもつことが上の注意11・2からわかる．注意7・4の（4）より，$\sigma: Y_k^{\mathbf{Z}} \to Y_k^{\mathbf{Z}}$ は拡大的でもある．

$Y_k^{\mathbf{Z}}$の上の推移写像 σ についてもう少し詳しく調べてみよう．$Y_k^{\mathbf{Z}}$の上に新たに距離関数 d を，$x=(x_i)$，$y=(y_i)\in Y_k^{\mathbf{Z}}$に対し

$$(11\cdot1)\quad d(x, y)=\begin{cases} 2^{-m} & (m \text{ は } |i|<m \text{ なる } i \text{ に対し } x_i=y_i \text{ を満たす最大数}) \\ 1 & (x_0 \neq y_0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する．この距離関数dは§3の3・6で与えた距離関数 $d(x, y)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} d_1(x_i, y_i)/2^{|i|}$ と同値であることが簡単に証明できる．

$Y_k^{\mathbf{Z}}$の閉部分集合Sが$\sigma(S)=S$を満たすとき，Sへのσの制限$\sigma_{|S}$を**部分推移写像**という．部分推移写像$\sigma_{|S}$が**有限型**であるとは，自然数Nと部分集合$C\subset\times_0^N Y_k$（Y_kの$N+1$個の直積）が存在して

$$S=\left\{x\in Y_k^{\mathbf{Z}} \,\middle|\, \begin{array}{l} x\in S \text{ の長さ } N+1 \text{ の任意のブロック} \\ (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+N}) \text{ は } C \text{ の点である} \end{array}\right\}$$

が成り立つときをいう．自然数Nを有限型$\sigma_{|S}$の**次数**という．有限型の部分推移写像$\sigma_{|S}$は明らかに拡大的である．

定理 11・6 任意の有限型の部分推移写像は次数1の有限型の部分推移写像と位相共役である．

証明 Sは$Y_k^{\mathbf{Z}}$の部分集合で，$\sigma_{|S}$が有限型の部分推移写像であるとし，$\sigma_{|S}$の次数はNとする．すなわち，CはY_kの$N+1$個の直積集合$\times_0^N Y_k$の部分集合とするとき，任意の$x\in S$の長さ$N+1$の任意のブロック$(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+N})$はすべて$C$の点である．$C$は有限集合であるから，無限直積空間$C^{\mathbf{Z}}=\times_{-\infty}^{\infty} C_i$（$C_i=C$）と$C^{\mathbf{Z}}$の上の推移写像$\tilde{\sigma}$を$\sigma$と同じようにして定義する．このとき，$x=(x_i)\in S$に対し

$$\varphi(\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)=\left(\cdots, \begin{pmatrix} x_{-1} \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{N+1} \end{pmatrix}, \cdots\right)$$

によって，写像$\varphi: S\to C^{\mathbf{Z}}$が定義される．$\varphi$は1対1であることは明らかである．$C^{\mathbf{Z}}$に$Y_k^{\mathbf{Z}}$と同じように距離関数を定義すれば，$C^{\mathbf{Z}}$はコンパクト完全不連結で$\varphi$は連続であることが確かめられる．すなわち，$\varphi$は同相写像である．

すべての $x=(x_i)\in S$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\varphi\,\sigma\,(\cdots, x_{-2}, x_{-1}, \overset{\downarrow}{x_0}, x_1, \cdots)\\
&=\varphi\,(\cdots, x_{-1}, x_0, \overset{\downarrow}{x_1}, x_2, \cdots)\\
&=\left(\cdots, \begin{pmatrix} x_{-1}\\ \vdots \\ x_{N-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{0}\\ \vdots \\ x_{N}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{x_{1}}\\ \vdots \\ x_{N+1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{2}\\ \cdots \\ x_{N+2}\end{pmatrix}, \cdots\right)\\
&=\tilde{\sigma}\,\varphi\,(\cdots, x_{-2}, x_{-1}, \overset{\downarrow}{x_0}, x_1, \cdots)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$\varphi(S)=S_c$ とおくと，$\sigma_{|S}$ は $\tilde{\sigma}_{|S_c}$ に位相共役である．すなわち，次の図式は可換である．

$\tilde{\sigma}_{|S_c}$ は次数1の有限型の部分推移写像である．

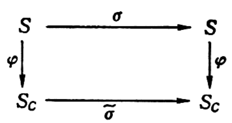


図 4·11

定理 11·7　S は $Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ の閉部分集合で，$\sigma(S)=S$ を満たしているとする．このとき，$\sigma_{|S}$ が擬軌道追跡性をもつための必要十分条件は $\sigma_{|S}$ が有限型となることである．

証明　$\Leftarrow$) の証明: $\sigma_{|S}$ は次数1の有限型であるとしてよい (定理 11·6). $\varepsilon>0$ を与えるとき，$2^{-m}<\varepsilon$ なる自然数 m が存在する．距離関数 d は (11·1) で定義されたものとする．このとき，任意の $x=(x_i)$，$y=(y_i)\in S$ に対し

$$d(x, y)<2^{-(m+1)}$$

ならば，$|i|\leqq m$ なる i に対し $x_i=y_i$ である．$\{x^i : i\in\boldsymbol{Z}\}$ は $\sigma_{|S}$ の $2^{-(m+1)}$-軌道とする．すなわち

$$d(\sigma_{|S}(x^i), x^{i+1})<2^{-(m+1)}\quad (i\in\boldsymbol{Z}).$$

このとき，すべての $i\in\boldsymbol{Z}$ に対し

$$x_1{}^i=x_0{}^{i+1}$$

である．いま

$$x_n=x_0{}^n\quad (n\in\boldsymbol{Z}),\quad x=(x_n)$$

とおくと，$n\in\boldsymbol{Z}$ に対し

$$(x_n, x_{n+1})=(x_0{}^n, x_0{}^{n+1})=(x_0{}^n, x_1{}^n)$$

である．だから x は次数1の点である．すなわち $x=(x_n)\in S$ である．$|j|\leqq m$ なる j と i に対し

$$(\sigma^i x)_j = x_{i+j} = x_j^{\,i}.$$

だから

$$d(\sigma_{|S}{}^i(x), x^i) \leqslant 2^{-m} < \varepsilon \quad (i \in \boldsymbol{Z}).$$

よって，点 x が $2^{-(m+1)}$-軌道 $\{x^i\}$ を ε-追跡する．

⇒) の証明：$\sigma_{|S}$ は拡大的であることに注意する．$\varepsilon>0$ は $\sigma_{|S}$ の拡大定数としよう．この ε に対し，$\varepsilon/2>\delta>0$ なる δ が存在して $\sigma_{|S}$ の任意の δ-軌道は ε-追跡される．このとき，$\sigma_{|S}$ が有限型であることを示せばよい．

$x=(x_i), y=(y_i)\in S$ と $|i|\leqslant N\text{-}1$ なる i に対し

$$x_i = y_i \quad \Rightarrow \quad d(x, y) < \delta$$

となる自然数 N が存在する．このとき，集合 A を

$$A = \begin{Bmatrix} S\text{ の任意の点の長さ } 2N+1 \text{ のすべてのブロック} \\ (x_{i-N}, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+N}) \text{ の全体} \end{Bmatrix}$$

によって定義し

$$S(A) = \{x \in Y_k{}^{\boldsymbol{Z}} : (x_{i-N}, \cdots, x_i, \cdots, x_{i+N}) \in A, i \in \boldsymbol{Z}\}$$

とおく．明らかに $S(A)\supset S$, $\sigma(S(A))=S(A)$ である．$\sigma_{|S(A)}$ は有限型で，次数は $2N$ である．したがって $S(A)=S$ が示されればよい．

任意の $y\in S(A)$ と任意の $i\in\boldsymbol{Z}$ に対し

$$(y_{i-N}, \cdots, y_i, \cdots, y_{i+N}) \in A$$

であるから，$y_{i+j}=x_j{}^i(|j|\leqslant N)$ となる $x^i\in S$ が存在して

$$d(\sigma^i(y), x^i) < \delta \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

すなわち $\{x^i\}$ は δ-軌道である．$\sigma_{|S}$ は擬軌道追跡性をもつから

$$d(\sigma_{|S}{}^i(z), x^i) < \varepsilon/2 \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

を満たす $z\in S$ が存在する．ところで

$$d(\sigma^i(z), \sigma^i(y)) \leqslant d(\sigma^i(z), x^i) + d(x^i, \sigma^i(y)) < \varepsilon \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

であるから，$z=y$ となり，$y\in S$ が成り立つ．y は $S(A)$ の中で任意であったから，$S(A)\subset S$ が得られる．

§ 12 標準座標系

距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在して

$$d(x, y)<\delta \quad \Rightarrow \quad W_\varepsilon^s(x, d)\cap W_\varepsilon^u(y, d)\neq\phi$$

を満たすとき，f は**標準座標系**をもつという．

注意 12·1 f が拡大的かつ標準座標系をもつとする．上の $\varepsilon>0$ と $\delta>0$ は拡大定数より小さく選ばれているとする．このとき $W_\varepsilon^s(x, d)\cap W_\varepsilon^u(y, d)$ は1点集合である．

注意 12·2 標準座標系の様子を図でみてみよう．定義によって $W_\varepsilon^s(x, d)=\bigcap_0^\infty f^{-i}U_\varepsilon(f^{-i}x)$、$W_\varepsilon^u(x, d)=\bigcap_0^\infty f^{i}U_\varepsilon(f^{-i}x)$ である．特に，点 x が不動点である場合は，$W_\varepsilon^s(x, d)=\bigcap_0^\infty f^{-i}U_\varepsilon(x)$、$W_\varepsilon^u(x, d)=\bigcap_0^\infty f^{i}U_\varepsilon(x)$ である．

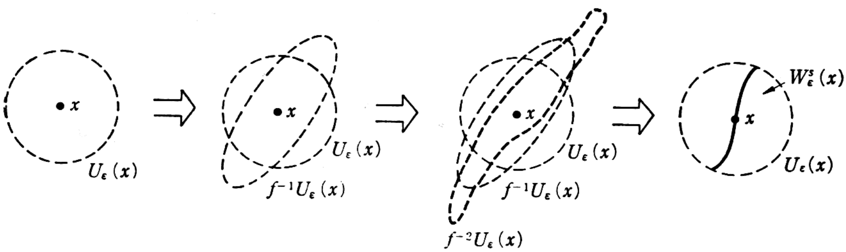


図 4·12

f が拡大的であれば，注意7·2でみたように $W_\varepsilon^s(x, d)$ と $W_\varepsilon^u(x, d)$ は下図のように1点で交叉する．

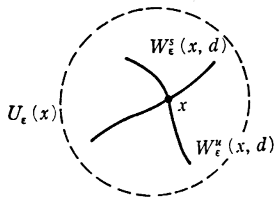


図 4·13

f が拡大的である場合に，点 x, y が十分に近ければ，下図のように1点で交叉する．

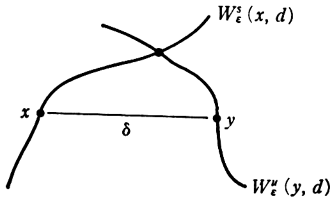


図 4・14

ところが，f の拡大性だけの条件では，どんなに小さな $\delta>0$ と $d(x, y)<\delta$ なる x, y を選んでも，$W_\varepsilon^s(x, d)\cap W_\varepsilon^u(y, d)$ が空となる場合があるかも知れない．

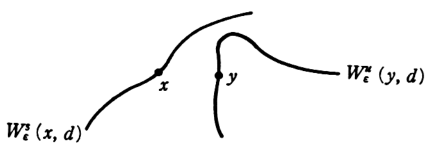


図 4・15

このことは δ-軌道 $\{\cdots, f^{-2}(y), f^{-1}(y), x, f(x), f^2(x), \cdots\}$ に対して，ε-追跡点が存在しないことを示している．すなわち，拡大性の条件だけから一般に擬軌道追跡性は得られないと考えられる．これは次の定理 12・1, 12・2 によって保証されるであろう．

定理 12・1 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f は拡大的かつ標準座標系をもつとする．このとき，f は擬軌道追跡性をもつ．

証明 $c>0$ は f の拡大定数とする．f は標準座標系をもつから，$c\geqq\varepsilon>0$ なる ε に対し，$\delta>0$ $(2\delta<\varepsilon)$ が存在して

(12・1) $d(x, y)<2\delta \Rightarrow W_{\varepsilon/2}{}^s(x, d)\cap W_{\varepsilon/2}{}^u(y, d)\neq\phi$

とできる．注意9・1より，自然数 N が存在して任意の $x\in X$ に対し

(12・2) $f^N W_c{}^s(x, d)\subset W_\delta{}^s(f^N(x), d)$, $f^{-N} W_c{}^u(x, d)\subset W_\delta{}^u(f^{-N}(x), d)$

が成り立つ．

任意の $k>0$ を固定し，f^N の任意の δ-有限軌道を

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$$

とすると，$d(f^N(x_1), x_2)<\delta$ であるから，(12•1) によって

$$z_2 \in W_{\varepsilon/2}{}^s(x_2, d) \cap W_{\varepsilon/2}{}^u(f^N(x_1), d)$$

が存在して

$$f^N(z_2) \in f^N W_{\varepsilon/2}{}^s(x_2, d) \subset W_\delta{}^s(f^N(x_2), d)$$

が得られる．よって

$$d(f^N(z_2), x_3) \leqslant d(f^N(z_2), f^N(x_2)) + d(f^N(x_2), x_3) < 2\delta.$$

ゆえに

$$z_3 \in W_{\varepsilon/2}{}^s(x_3, d) \cap W_{\varepsilon/2}{}^u(f^N(z_2), d)$$

が存在して，$d(f^N(z_3), x_4)<2\delta$ とできる．このことを帰納的につづけるとき，$1 \leqslant i \leqslant k$ なる i に対し

$$z_i \in W_{\varepsilon/2}{}^s(x_i, d) \cap W_{\varepsilon/2}{}^u(f^N(z_{i-1}), d)$$

が存在して，$d(f^N(z_{i-1}), x_i)<2\delta$ が成り立つようにできる．$d(f^N(z_{k-1}), x_k)<2\delta$ であるから，空でない集合

$$W_{\varepsilon/2}{}^s(x_k, d) \cap W_{\varepsilon/2}{}^u(f^N(z_{k-1}), d)$$

から，点 y を選び

$$\tilde{y} = f^{-Nk}(y)$$

とおくと，$\tilde{y}$ は f^N によって $\{x_1, \cdots, x_k\}$ を ε-追跡する．

このことを示そう．$y \in W_{\varepsilon/2}{}^s(x_k, d)$ であるから，明らかに $d(x_k, y)<\varepsilon/2$ である．さらに

$$y \in W_{\varepsilon/2}{}^u(f^N(z_{k-1}), d) \subset W_c{}^u(f^N(z_{k-1}), d)$$

である．だから，(12•2) において x の代わりに $f^N(z_{k-1})$ とおくと

$$f^{-N}(y) \in W_\delta{}^u(z_{k-1}, d).$$

一方，$z_{k-1} \in W_{\varepsilon/2}{}^s(x_{k-1}, d)$ であるから，$d(z_{k-1}, x_{k-1})<\varepsilon/2$．よって

$$d(f^{-N}(y), x_{k-1}) \leqslant d(f^{-N}(y), z_{k-1}) + d(z_{k-1}, x_{k-1}) < \varepsilon.$$

次に，$f^{-N}(y) \in W_\delta{}^u(z_{k-1}, d)$，$z_{k-1} \in W_{\varepsilon/2}{}^u(f^N(z_{k-2}), d)$ から

$$f^{-N}(y) \in W_{\delta+\varepsilon/2}{}^u(f^N(z_{k-2}), d) \subset W_c{}^u(f^N(z_{k-2}), d).$$

よって (12·2) において x の代わりに $f^N(z_{k-2})$ とおくと

$$f^{-2N}(y)\in W_\delta^u(z_{k-2},d).$$

しかし $z_{k-2}\in W_{\varepsilon/2}^s(x_{k-2},d)$ から

$$d(f^{-2N}(y),x_{k-2})\leqslant d(f^{-2N}(y),z_{k-2})+d(z_{k-2},x_{k-2})<\varepsilon.$$

同様にして

$$d(f^{-iN}(y),x_{k-i})<\varepsilon \quad (0\leqslant i\leqslant k-1)$$

が求まる．上の不等式は次のように書き換えることができる．

$$\tilde{y}=f^{-kN}(y),\ d(f^{Ni}(\tilde{y}),x_i)<\varepsilon \quad (1\leqslant i\leqslant k).$$

k は任意であるから，補題 11·2 によって f^N は擬軌道追跡性をもつ．よって，定理 11·2 により f は擬軌道追跡性をもつ．

定理 12·2　距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が擬軌道追跡性をもてば，f は標準座標系をもつ．

証明　f は擬軌道追跡性をもつから，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ を擬軌道追跡性の定義に現れる数とする．このとき $d(x,y)<\delta$ なる 2 点 x,y から，δ-軌道

$$\{\cdots,f^{-2}(x),f^{-1}(x),f(y),f^2(y),\cdots\}$$

を構成すると，ε-追跡点 $z\in X$ が存在する．この点 z は集合 $W_\varepsilon^u(x)\cap W_\varepsilon^s(y)$ に含まれるから，f は標準座標系をもつ．

§13　リフトの擬軌道追跡性と拡大性

$(\bar{X},\bar{d}),(X,d)$ は距離空間とし，π は $\bar{X}$ から X の上への連続写像とする．このとき，π が**局所等長被覆写像**であるとは，任意の $x\in X$ に対し x の開近傍 $U(x)$ が存在して，$\pi^{-1}(U(x))$ が平等に被われる．すなわち

$$\pi^{-1}(U(x))=\cup_\alpha U_\alpha \quad (\alpha\neq\alpha' \Rightarrow U_\alpha\cap U_{\alpha'}=\phi)$$

なる開集合 U_α が存在して $\pi:U_\alpha\to U(x)$ は等長写像となるときをいう．

定理 13·1　$(\bar{X},\bar{d}),(X,d)$ は距離空間とし，$\pi:\bar{X}\to X$ は局所等長被覆写像，$f:\bar{X}\to\bar{X}$，$g:X\to X$ は同相写像とする．次の条件を仮定しよう．

（i）　$\pi\circ f=g\circ\pi$.

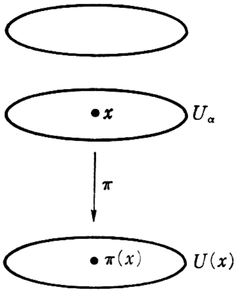


図 4・16

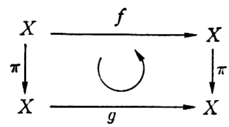


図 4・17

(ii) X はコンパクトである.

(iii) $\delta_0>0$ が存在して，任意の $x\in X$ に対し $0<\delta\leqq\delta_0$ なる半径 δ の開球 $U_\delta(x)$ が連結にとれる.

このとき，f が擬軌道追跡性をもつための必要十分条件は g もその性質をもつことである.

証明 π と X に対する条件から，任意の $p\in\bar{X}$ に対し $0<\delta\leqq\delta_0$ なる半径 δ の開球 $U_\delta(p)$ は連結にとれ，さらに $U_\delta(\pi(p))$ は π によって平等に被われ

$$\pi|_{U_\delta(p)}: U_\delta(p)\to U_\delta(\pi(p))$$

は等長的となることに注意しよう.

3段階に分けて証明を行う.

段階 (1): f は一様連続である.

任意の $\varepsilon(0<\varepsilon<\delta)$ に対し，$\delta_1>0$ が存在して

$$\bar{d}(p,g)<\delta_1\,(p,q\in\bar{X}) \quad\Rightarrow\quad \bar{d}(f(p),f(q))<\varepsilon$$

を示せばよい. X はコンパクトであるから g は一様連続である. ゆえに $\delta_2>0$ が存在して

$$d(x,y)<\delta_2\,(x,y\in X) \quad\Rightarrow\quad d(g(x),g(y))<\varepsilon$$

とできる. $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおく.

さて，$p,q\in\bar{X}$ に対し $\bar{d}(p,q)<\delta$ であれば

$$d(\pi(p),\pi(q))=\bar{d}(p,q)<\delta.$$

だから

$$d(\pi\circ f(p),\ \pi\circ f(q))=d(g\circ\pi(p),\ g\circ\pi(g))<\varepsilon.$$

よって

$$\pi\circ f(q)\in U_\delta(g\circ\pi(p))$$

である．ゆえに

$$fU_\delta(p)\subset\pi^{-1}U_\delta(g\circ\pi(p)).$$

開集合 $fU_\delta(p)$ は連結であるから，$\pi^{-1}U_\delta(g\circ\pi(p))$ の点 $f(p)$ を含む連結成分 $\tilde{U}$ は

$$\tilde{U}\supset fU_\delta(p)$$

を満たし

$$\pi: U\to U_\delta(g\circ\pi(p))$$

は等長的である．$f(q)\in\tilde{U}$ であるから

$$\bar{d}(f(p),f(q))=d(\pi\circ f(p),\ \pi\circ f(q))<\varepsilon.$$

これは f の一様連続性を示している．

段階 (2)：f が擬軌道追跡性をもてば，g もその性質をもつ．

任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在して f の任意の δ-軌道 $\{p_i\}$ が f によって ε-追跡される．ここに δ は $\delta<\delta_0$ とする．この δ に対し，g の任意の δ-軌道 $\{y_i\}$ が g によって ε-追跡されることを示せばよい．

$$\pi(p_0)=y_0$$

なる $p_0\in\bar{X}$ を固定する．$\pi(p_i)=y_i$ なる $p_i\in\bar{X}$ が決められたとして，$f(p_i)\in\bar{X}$ から

$$\pi\circ f(p_i)=g\circ\pi(p_i)=g(y_i)$$

を得る．一方

$$y_{i+1}\in U_\delta(g(y_i))$$

であるから

$$\pi(p_{i+1})=y_{i+1}$$

を満たす $p_{i+1}\in U_\delta(f(p_i))$ がただ1つ存在する．点列 $\{p_i: i\geqslant 0\}$ の選び方から，$\{p_i\}$ は f の δ-軌道である．よって f による ε-追跡点 y が存在する．すなわち

$$\bar{d}(f^i(y),p_i)<\varepsilon\quad(i\geqslant 0).$$

$\pi(y)=z$ とおく．$\bar{d}(f^i(y),p_i)<\varepsilon<\delta_0$ であるから

$$d(g^i(z), y_i) = d(g^i \circ \pi(y), y_i) = d(\pi \circ f^i(y), \pi(p_i))$$
$$= \bar{d}(f^i(y), p_i) < \varepsilon$$

がすべての $i \geqslant 0$ に対して成り立つ．よって，補題11・2より g は擬軌道追跡性をもつ．

段階（3）：g が擬軌道追跡性をもてば，f もその性質をもつ．

任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在して g の任意の δ-軌道 $\{y_i\}$ は ε-追跡される．ここに $\varepsilon<\delta_0/2$, $\delta<\delta_0/2$ としよう．段階（1）により

$$\bar{d}(p, q) < \varepsilon \ (p, q \in \bar{X}) \quad \Rightarrow \quad \bar{d}(f(p), f(q)) < \delta_0/2$$

を仮定してよい．$\bar{X}$ の点列 $\{p_i : i \geqslant 0\}$ は f の任意の δ-軌道とし，$i \geqslant 0$ なる i に対し

$$y_i = \pi(p_i)$$

とおくと，$\{y_i\}$ は g の δ-軌道である．実際に

$$\bar{d}(f(p_i), p_{i+1}) < \delta < \delta_0$$

であるから，すべての $i \geqslant 0$ に対し

$$d(g(y_i), y_{i+1}) = d(\pi \circ f(p_i), \pi(p_{i+1})) = \bar{d}(f(p_i), p_{i+1}) < \delta$$

が成り立つ．

よって $z \in X$ が存在して

$$d(g^i(z), y_i) < \varepsilon \quad (i \geqslant 0)$$

である．特に，$d(z, y_0) < \varepsilon$. だから $\pi(q) = z$, $q \in U_{\delta_0}(p_0)$ を満たす点 $q \in \bar{X}$ が存在する．最初に

(13・1) $\bar{d}(f^i(q), p_i) < \varepsilon \quad (i \geqslant 0)$

を示そう．まず

$$d(\pi \circ f^i(q), \pi(p_i)) = d(g^i \circ \pi(q), y_i) = d(g^i(z), y_i) < \varepsilon$$

に注意する．(13・1) は $i=0$ に対し成り立つ．$i \geqslant 1$ に対し

$$\bar{d}(f^{i-1}(q), p_{i-1}) < \varepsilon$$

を仮定したとき，i に対しても (13・1) が成り立つことを示せばよい．

$$\bar{d}(f \circ f^{i-1}(q), f(p_{i-1})) < \delta_0/2, \quad \bar{d}(f(p_{i-1}), p_i) < \delta < \delta_0/2$$

であるから

$$\bar{d}(f^i(g), p_i) < \delta_0.$$

$\pi: U_{\delta_0}(p) \to U_{\delta_0}(\pi(p))$ は等長的であるから

$$\bar{d}(f^i(q), p_i) = d(\pi \circ f^i(q), \pi(p_i)) = d(g^i(z), y_i) < \varepsilon.$$

したがって，点 q は δ-軌道 $\{p_i : i \geqq 0\}$ を ε-追跡している．ここで補題11·2を使うと δ-軌道 $\{p_i : i \in \boldsymbol{Z}\}$ を ε-追跡する点が得られる．

定理 13·2 定理13·1の仮定のもとで，g が拡大的であるための必要十分条件は f もその性質をもつことである．

証明 $\varepsilon_1 > 0$ が存在して，$p \neq q$ なる $p, q \in \bar{X}$ に対し

$$\pi(p) = \pi(q) \quad \Rightarrow \quad \bar{d}(p, q) \geqq \varepsilon_1$$

であることを示そう．

$\delta_0 > 0$ は定理13·1におけるものとする．上の主張が成り立たなければ，任意の自然数 n に対し

$$p_n \neq q_n,\ \pi(p_n) = \pi(q_n),\ \bar{d}(p_n, q_n) < 1/n$$

を満たすものが存在する．いま，$1/n_0 < \delta_0$ なる n_0 に対し

$$\bar{d}(p_{n_0}, q_{n_0}) < \delta_0.$$

$x = \pi(p_{n_0})$ とおくと

$$\pi: U_{\delta_0}(p_{n_0}) \to U_{\delta_0}(x)$$

は等長的である．$q_{n_0} \in U_{\delta_0}(p_{n_0})$，$\pi(q_{n_0}) = \pi(p_{n_0}) = x$ であるから，$q_{n_0} = p_{n_0}$ となって矛盾が生ずる．

まず g が拡大的であるとし，$\varepsilon_0 > 0$ は g の拡大定数とする．δ_0, ε_1 は上のものとする．

$$\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \delta_0\}$$

とおくと，ε_2 は f の拡大定数であることを示そう．

$p, q \in \bar{X}$，$p \neq q$ とする．$\pi(p) = x$，$\pi(q) = y$ とおく．$x = y$ ならば，上でみたように

$$\bar{d}(p, q) \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2$$

である．$x \neq y$ ならば g は拡大的であるから

$$d(g^k(x), g^k(y)) \geqq \varepsilon$$

を満たす $k \in \boldsymbol{Z}$ が存在する．さて，$\bar{d}(f^k(p), f^k(q)) < \delta_0$ のとき，π の等長性に

よって

$$\bar{d}(f^k(p), f^k(q))=d(\pi\circ f^k(p), \pi\circ f^k(q))=d(g^k(x), g^k(y))\geqq \varepsilon_0\geqq \varepsilon_2$$

を得る．よって f は拡大的である．

逆に，f が拡大的であるとし，$\varepsilon_3>0$ は f の拡大定数とする．このとき

$$\varepsilon_4=\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \delta_0\}$$

が g の拡大定数であることを示そう．

すべての $k\in \boldsymbol{Z}$ に対し，$d(g^k(x), g^k(y))<\varepsilon_4$ とする．$x=\pi(p)$ なる $p\in\bar{X}$ を固定し，$y=\pi(q)$ なる $q\in\bar{X}$ を $U_{\delta_0}(p)$ から選ぶ．このとき，帰納的に $f^k(q)\in U_{\delta_0}(f^k p)$ がすべての $k\in \boldsymbol{Z}$ に対して成り立つようにできる．ところで π の等長性から

$$\bar{d}(f^k(p), f^k(q))=d(g^k(x), g^k(y))<\varepsilon_4$$

がすべての $k\in \boldsymbol{Z}$ に対して成り立つ．f は拡大的であるから $p=q$ となり，$x=\pi(p)=\pi(q)=y$ を得る．これは g が拡大的であることを示している．

第5章　位相的安定性と非遊走集合

§ 14 では，任意の有界集合が相対コンパクトであるような距離空間の上の同相写像が拡大的で擬軌道追跡性を満たすとき，位相的に安定であることを示す．また，n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ の線形写像に対して，拡大性と擬軌道追跡性が同値であることを示し，これらはその固有値の絶対値が1にならないという条件で特徴づけられることを示す．

§ 15 では，非遊走集合，鎖回帰集合を定義し，コンパクト距離空間の上の擬軌道追跡性を満たす同相写像に対して，これらが一致することを証明する．また，擬軌道追跡性をもつ同相写像をその非遊走集合に制限したものも擬軌道追跡性をもつことを証明する．さらに，コンパクト距離空間の上の同相写像が，その非遊走集合の上で拡大的で擬軌道追跡性をもつとき，Smale のスペクトル分解定理および Bowen 分解定理を証明する．また，同じ条件の下で安定多様体および不安定多様体による全空間の分割が成立することを証明する．これらは Smale の公理 A 力学系に対して成立する諸定理の位相力学的アナロジーである．

§ 16 では，コンパクト距離空間の上の同相写像に対して明記性の概念を定義し，明記性をもつ同相写像は位相混合的で，周期点が稠密に存在することを示す．また，位相混合的で拡大的かつ擬軌道追跡性をもつならば明記性をもつことを証明する．

§ 14　位相的安定性

距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が**位相的に安定**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して

$$\max\{d(f(x),g(x)):\ x\in X\}<\delta$$

を満たす任意の同相写像 $g: X\to X$ をもってくれば，X から X への連続写像 h（必ずしも全射ではない）が存在して

（i）　$h\circ g=f\circ h$

（ii）　$\max\{d(h(x),x): x\in X\}<\varepsilon$

とできるときをいう．

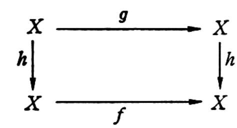


図 5·1

定理 14·1　距離空間 (X,d) の任意の有界集合は相対コンパクトであるとす

る．このとき同相写像 $f: X \to X$ が拡大的で擬軌道追跡性を満たすならば，f は位相的に安定である．

$c>0$ は f の拡大定数とし，$0<\varepsilon<c/2$ なる ε に対し，$\delta>0$ は f の擬軌道追跡性の定義にあらわれる数とする．

補題 14・1　$f: X \to X$ の任意の δ-軌道 $\{x_i : i \in \boldsymbol{Z}\}$ に対し，f による ε-追跡点 $x \in X$ は唯一つ存在する．

証明　点 $y \in X$ で $d(f^i(y), x_i)<\varepsilon$ $(i \in \boldsymbol{Z})$ であったとしよう．このとき

$$d(f^i(y), f^i(x)) \leqslant d(f^i(y), x_i)+d(x_i, f^i(x)) \leqslant 2\varepsilon<c \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

が成り立つ．ところが c は拡大定数であるから，$y=x$ である．

定理 14・1 の証明　同相写像 $g: X \to X$ はすべての $x \in X$ に対し $d(f(x), g(x))<\delta$ を満たしているとする．任意の $x \in X$ に対し，$\{g^i(x) : i \in \boldsymbol{Z}\}$ は f の δ-軌道であるから，補題 14・1 により一意的に $y \in X$ が存在して

$$d(f^i(y), g^i(x))<\varepsilon/2 \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

である．よって $y=h(x)$ とおくことにより写像 $h: X \to X$ が求まる．上の不等式から，$d(f^i \circ h(x), g^i(x))<\varepsilon/2$ $(i \in \boldsymbol{Z})$ である．特に $i=0$ のとき

$$d(h(x), x)<\varepsilon/2 \quad (x \in X).$$

さらに

$$\begin{aligned} d(f^i \circ f \circ h(x), f^i \circ h \circ g(x)) &\leqslant d(f^i \circ f \circ h(x), g^i \circ g(x)) \\ &\quad + d(f^i \circ h \circ g(x), g^i \circ g(x))<\varepsilon<c \end{aligned}$$

がすべての $i \in \boldsymbol{Z}$ に対して成り立つ．よって

$$f \circ h(x)=h \circ g(x) \quad (x \in X).$$

h の連続性を示すことが残っている．ある点 $x_0 \in X$ で h が不連続であるとすると，点 x_0 に収束する点列 $x_\nu (x_\nu \to x_0)$ に対し，$y_\nu=h(x_\nu)$ とおくと

$$y_\nu \not\to y_0=h(x_0) \quad (\nu \to \infty)$$

である．すなわち $\{y_\nu\}$ は y_0 に収束しない．$\{x_\nu\}$ は有界で $d(h(x), x)<\varepsilon/2$ $(x \in X)$ であることによって，$\{h(x_\nu)\}$ も有界である．したがって，$y_0' \in X$ $(y_0' \neq y_0)$ が存在して

$$y_\nu \longrightarrow y_0' \quad (\nu \longrightarrow \infty)$$

としてよい．f は拡大的であるから，ある $k \in \boldsymbol{Z}$ があって

$$d(f^k(y_0'),\ f^k(y_0)) \geqslant c.$$

この k を固定する．このとき，十分大きな ν_0 が存在して

$$d(f^k(y_\nu), f^k(y_0')) < c/4 \qquad (\nu \geqslant \nu_0)$$

$$d(g^k(x_\nu), g^k(x_0)) < \varepsilon/2 \qquad (\nu \geqslant \nu_0)$$

とできる．よって

$$\begin{aligned} d(f^k(y_\nu), f^k(y_0)) &= d(f^k \circ h(x_\nu), f^k \circ h(x_0)) = d(h \circ g^k(x_\nu), h \circ g^k(x_0)) \\ &\leqslant d(h \circ g^k(x_\nu), g^k(x_\nu)) + d(g^k(x_\nu), g^k(x_0)) \\ &\quad + d(g^k(x_0), h \circ g^k(x_0)) < 3\varepsilon/2. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} c \leqslant d(f^k(y_0'), f^k(y_0)) &\leqslant d(f^k(y_0'), f^k(y_\nu)) + d(f^k(y_\nu), f^k(y_0)) \\ &< c/4 + 3\varepsilon/2 < c \end{aligned}$$

となって矛盾が起こる．よって $h: X \to X$ は連続である．

注意 14·1 定理 14·1 の同相写像 g が特に拡大的で，その拡大定数 $c' > 0$ が f の拡大定数 $c > 0$ より大であるとする ($c \leqslant c'$)．このとき連続写像 $h: X \to X$ は 1 対 1 である．

証明 $h(x) = h(y)$ とする．$d(h(z), z) < \varepsilon$ $(z \in X)$ であるから

$$\begin{aligned} d(g^i(x), g^i(y)) &\leqslant d(g^i(x), f^i h(x)) + d(f^i h(y), g^i(y)) \\ &= d(g^i(x), h(g^i x)) + d(h(g^i y), g^i(y)) \\ &< 2\varepsilon < c \leqslant c' \end{aligned}$$

がすべての $i \in \boldsymbol{Z}$ で成り立つ．g は拡大的であるから，$x = y$ である．

注意 14·2 定理 14·1 で存在した連続写像 $h: X \to X$ は一般に X の上への写像でない例が存在する．

$Y_2 = \{0, 1\}$ として，前でみたように無限直積空間 $Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ を定義する．$Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ の上の距離関数 d を (11·1) のように与える．$Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ の上の推移写像 σ は拡大的（注意 7·4）かつ擬軌道追跡性（注意 11·2）をもっている．m を自然数とする．この

とき，$Y_2{}^{\boldsymbol{Z}}$ の上の同相写像 $g: Y_2{}^{\boldsymbol{Z}} \to Y_2{}^{\boldsymbol{Z}}$ を $x=(x_i), y=(y_i) \in Y_2{}^{\boldsymbol{Z}}$ に対し

$$(gx)_i = x_i \qquad (i<-m, i>m)$$

$$(gx)_i = x_{i+1} \qquad (-m \leqq i < m)$$

$$(gx)_m = x_{-m}$$

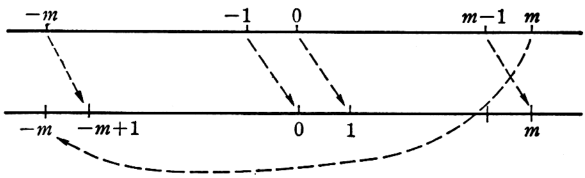


図 5·2

と定義する．σ は擬軌道追跡性をもつから，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ があって σ の任意の δ-軌道は σ によって ε-追跡される．前に選んだ自然数 m を $1/2m<\delta$ を満たすように十分大きく定める．このとき $d(g(x), \sigma(x))<\varepsilon\,(x \in Y_2{}^{\boldsymbol{Z}})$ であるから，定理 14·1 により，$h\circ\sigma = g\circ h$, $d(h(x), x)<\varepsilon(x\in Y_2{}^{\boldsymbol{Z}})$ を満たす連続写像 $h: Y_2{}^{\boldsymbol{Z}} \to Y_2{}^{\boldsymbol{Z}}$ が存在する．ところが

$$g^{2m+1}(x) = x \quad (x \in Y_2{}^{\boldsymbol{Z}})$$

である．だから

$$h(x) = h(g^{2m+1}(x)) = \sigma^{2m+1}h(x) \quad (x \in Y_2{}^{\boldsymbol{Z}})$$

が成り立つ．もし $h(Y_2{}^{\boldsymbol{Z}}) = Y_2{}^{\boldsymbol{Z}}$ とすれば，$\sigma^{2m+1}(x)=x(x\in Y_2{}^{\boldsymbol{Z}})$ となって，σ が拡大的であることに反する．よって，h は中への写像である．

定理 14·2　f は n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の上の線型写像とし，d は $\boldsymbol{R}^n$ の上のユークリッド距離関数とする．このとき次は同値である．

(1)　f のすべての固有値 λ の絶対値は $|\lambda| \neq 1$ である．

(2)　f は d に関して拡大的である．

(3)　f は d に関して擬軌道追跡性をもつ．

証明　まず線形写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ を複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の上へ拡張しよう．i を虚数単位とし，$a, b \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$f_C(a+ib) = f(a) + if(b)$$

とおくと，$f_C: \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ は線形写像である．一方，直積空間 $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ (2n 次元ユ

ークリッド空間）の上に

$$f\times f(a,b)=(f(a),f(b))\quad (a,b\in \boldsymbol{R}^n)$$

によって線形写像 $f\times f$ が定義される．$(x,y),(x',y')\in \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ に対し

$$\bar{d}((x,y),(x',y'))=\max\{d(x,x'),d(y,y')\}$$

によって $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ の上に距離関数 $\bar{d}$ を定義する．$\boldsymbol{C}^n$ の上の通常のノルムによって

$$\tilde{d}(z,z')=\|z-z'\|\quad (z,z'\in \boldsymbol{C}^n)$$

とおくと，$\tilde{d}$ は $\boldsymbol{C}^n$ の上の距離関数である．点 $(a,b)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ に対し

$$h:(a,b)\longmapsto a+ib$$

による対応 h は $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{C}^n$ の上への線形写像であるから，明らかに一様連続である．f_C と $f\times f$ との間に次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}h\circ(f\times f)(a,b)&=h(f(a),f(b))=f(a)+if(b)=f_C(a+ib)\\&=f_C\circ h(a,b)\quad ((a,b)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n).\end{aligned}$$

よって，次の図式は可換である．

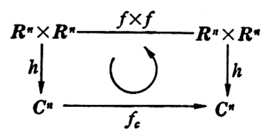


図 5・3

（3）⇒（1）の証明：$f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ は d に関して擬軌道追跡性をもっているから，$f\times f:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ も $\bar{d}$ に関して擬軌道追跡性をもっている（定理11・5）．$h:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{C}^n$ は一様連続であるから，定理 11・4 を応用すれば，f_C も $\tilde{d}$ に関して擬軌道追跡性をもつ．f_C と f_C の Jordan の標準形に対応する線形写像 f_C' とはある線形写像によって位相共役である．よって，f_C' も $\tilde{d}$ に関して擬軌道追跡性をもつ．f_C' に対応する行列の形は

$$\begin{pmatrix}\begin{array}{cccc|c|cccc}\lambda_1&1&&&&&&&\\&\ddots&\ddots&&&&&&\\&&\ddots&1&&&&&\\&&&\lambda_1&&&&&\\\hline&&&&\ddots&&&&\\\hline&&&&&\lambda_k&1&&\\&&&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&&&&\ddots&1\\&&&&&&&&\lambda_k\end{array}\end{pmatrix}$$

であるから，各 i に対し g_i を

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

に対応する線形写像とするとき，線形空間 $\boldsymbol{C}^n$ は

$$\boldsymbol{C}^n=\boldsymbol{C}^{n_1}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{C}^{n_k}$$

に直和分解され，任意の $a_i\in C^{n_i}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ に対し

$$f_C'(a_1+\cdots+a_k)=g_1(a_1)+\cdots+g_k(a_k)$$

と表される．f_C' は擬軌道追跡性をもつから，各 g_i も通常の距離関数に関して擬軌道追跡性をもつ．逆も成り立つ．よって $n\times n$-行列

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

に対応する線形写像 $g:\boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^n$ が擬軌道追跡性をもつならば，$|\lambda|\neq1$ であることを示せば（1）の結論が得られる．

$|\lambda|=1$ を仮定しよう．1つの正の実数 δ に対して

$$z_j=j\lambda^j\delta \quad (j\in\boldsymbol{Z})$$

とおき，$\boldsymbol{C}^n$ のベクトル

$$v_j=(0,\cdots,0,z_j)$$

を考える．このとき，$\{v_j\}$ は g に関する δ-軌道である．すなわち

$$\tilde{d}(g(v_j),v_{j+1})=|j\lambda^{j+1}\delta-(j+1)\lambda^{j+1}\delta|=\delta.$$

しかし，$w=(w_1,\cdots,w_n)\in\boldsymbol{C}^n$ に対し

$$\tilde{d}(g^m(w),v_m)\geqslant|\lambda^m w_n-m\lambda^m\delta|=|w_n-m\delta|$$

であるから，どんな小さな $\delta>0$ に対しても $\tilde{d}(g^m(w),v_m)$ が有界となる $w\in\boldsymbol{C}^n$ が存在しない．よって g は擬軌道追跡性をもたない．ゆえに f のすべての固有値 λ は $|\lambda|\neq1$ である．

（1）⇒（3）の証明：f の固有値 λ の絶対値は $|\lambda|>1$ と $|\lambda|<1$ の2種類であるから，$\boldsymbol{R}^n$ の2つの部分空間 E^u と E^s，定数 $c>1$，$0<\alpha<1$ が存在して

（i） $\boldsymbol{R}^n=E^s\oplus E^u$

（ii） $f(E^s)=E^s$，$f(E^u)=E^u$

(iii) $\|f^n(v)\| < c\alpha^n \|v\| \quad (v \in E^s,\ n \geqslant 0)$

(iv) $\|f^{-n}(v)\| \leqslant c\alpha^n \|v\| \quad (v \in E^u,\ n \geqslant 0)$

とできる，$f_s = f_{|E^s}$，$f_u = f_{|E^u}$ とおくと，$\boldsymbol{R}^n$ と $E^s \times E^u$ は同型であるから，次の図式が可換となる線形写像 h_1 が存在する．よって，f_s と f_u が擬軌道追跡性をもつことを示せばよい．

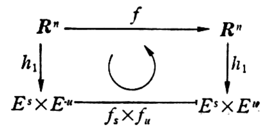


図 5.4

最初に，$f_u : E^u \to E^u$ について調べよう．実数 $\varepsilon > 0$ を与え，$\delta = (1-\alpha)\varepsilon/c$ とおく．f_u の任意の δ-軌道 $\{x_i\}$ は f_u によって ε-追跡されることを示そう．整数 k に対し

$$\alpha_k = x_{k+1} - f_u(x_k).$$

とおく．このとき $\alpha_k \in E^u$ かつ $\|\alpha_k\| \leqslant \delta$ がすべての $k \in \boldsymbol{Z}$ で成り立つ．$k \geqslant 0$ に対し

$$x_k = f_u{}^k(x_0) + f_u{}^{k-1}(\alpha_0) + f_u{}^{k-2}(\alpha_1) + \cdots + \alpha_{k-1}$$

であることが帰納的に確かめられる．いま $g = f_u{}^{-1}$ とおくと，(iv) によって

$$\|g^k\| \leqslant c\alpha^k \quad (k \geqslant 0)$$

かつ

$$x_k = f_u{}^k\{x_0 + g(\alpha_0) + g^2(\alpha_1) + \cdots + g^k(\alpha_{k-1})\}$$

と表される．簡単にするために

$$v_k = g(\alpha_0) + g^2(\alpha_1) + \cdots + g^k(\alpha_{k-1}) \quad (k > 0)$$

とおくと

$$x_k = f_u{}^k(x_0 + v_k)$$

である．ところで，$p > k > 0$ なる p, k に対し

$$\|v_p - v_k\| = \Big\|\sum_{i=k+1}^{p} g^i(\alpha_{i-1})\Big\| \leqslant \sum_{i=k+1}^{p} \|g^i(\alpha_{i-1})\|$$

$$\leqslant c \sum_{i=k+1}^{p} \alpha^i \|\alpha_{i-1}\| \leqslant c\delta\alpha^{k+1}/(1-\alpha) \to 0 \quad (k \to \infty)$$

である．だから，$\{v_k\}$ は Cauchy 列である．よって $\beta \in E^u$ が存在して

$$\lim_{k \to \infty} v_k = \beta$$

とできる．いま

$$y=x_0+\beta$$

とおくと

$$f_u{}^k(y)-x_k=f_u{}^k(x_0+\beta-x_0-\sum_{i=1}^{k} g^i(\alpha_{i-1}))=f_u{}^k(\sum_{i=k+1}^{\infty} g^i(\alpha_{i-1}))$$
$$=\sum_{i=k+1}^{\infty} g^{i-k}(\alpha_{i-k}).$$

よって

$$d(f_u{}^k(y), x_k)=\|f_u{}^k(y)-x_k\|\leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty}\|g^{i-k}\|\delta\leqslant c\delta/(1-\alpha)=\varepsilon$$

が得られる．$k>0$ は任意であるから，補題11・2によって f_u は擬軌道追跡性をもつ．同様にして，$f_s{}^{-1}$ も擬軌道追跡性をもつから，定理11・3によって，f_s もそれをもつ．よって f は擬軌道追跡性をもつ．

(2) ⇒ (1) の証明: f は $|\lambda|=1$ なる固有値 λ をもっていたとしよう．このとき，$\boldsymbol{R}^n$ は3つの部分空間 E^c, E^s, E^u と実数 $c>0$, $0<\alpha<1$ が存在して

(i)　$\boldsymbol{R}^n=E^c\oplus E^s\oplus E^u$

(ii)　$f(E^\sigma)=E^\sigma$,　$\sigma=c, s, u$

(iii)　部分空間 E^u, E^s において

$$\|f^n(v)\|\leqslant c\alpha^n\|v\|(v\in E^s, n\geqslant 0),\quad \|f^{-n}(v)\|\leqslant c\alpha^n\|v\|\quad (v\in E^u, n\geqslant 0)$$

とできる．特に

(iv)　$f_{|E^c}$ は実数体の中での Jordan の標準形 J に対応する線形写像 g と位相共役である．

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}$$

ここで J_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ は

$$J_j=\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 & & 0 \\ & \pm 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}\quad \text{(複号同順)}$$

または

$$J_j=\begin{pmatrix} R(\theta_j) & I & & & \\ & R(\theta_j) & I & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & I \\ & & & & R(\theta_j) \end{pmatrix}$$

の形の行列で，I は 2×2 単位行列

$$R(\theta_j)=\begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}\quad (\theta_j \text{ は } \pi \text{ の整数倍でない})$$

の形の行列である.

(iv) より E^c には1次元または2次元の適当な部分ベクトル空間 F があって

$$g_{|F}: F\to F$$

は等長的であることがわかる. したがって g は拡大的でない. これは矛盾である. ゆえに f の固有値 λ は $|\lambda|\neq 1$ でなくてはならない.

(1) ⇒ (2) の証明は ((1) ⇒ (3)) の証明の(i)〜(iv) を使えば容易に求まる.

§ 15 非遊走集合とスペクトル分解

位相空間 X の上の同相写像 f に対して，点 $x\in X$ が**非遊走点**であるとは，x の任意の近傍 U に対し，$U\cap f^n(U)\neq\phi$ なる $n>0$ が存在するときをいう. 非遊走点の集合を**非遊走集合**といい，$\Omega(f)$で表す. 補集合 $X\setminus\Omega(f)$ は開集合であるから，$\Omega(f)$ は閉集合である. $f(\Omega(f))=\Omega(f)$は定義より明らかである. X がコンパクト距離空間であれば，$\Omega(f)\neq\phi$ である. 実際に，ω-極限集合 $\omega(x)$ は空集合ではなく $\omega(x)\subset\Omega(f)$ であることに注意すればよい. また概周期点は非遊走点であることは明らかであるから，f がディスタルであれば，定理6·2により任意の点 $x\in X$ は概周期点である. よって $\Omega(f)=X$ である.

(X, d) はコンパクト距離空間，α は正の実数とする. 2点 $x, y\in X$ に対し，2通りの f の α-有限軌道

$$x_0=x, x_1, \cdots, x_k=y\,;\ y_0=y, y_1, \cdots, y_l=x$$

が存在するとき，x は y と α-**関係**にあるとよび，$x\overset{\alpha}{\sim}y$ で表すことにする. すべての $\alpha>0$ に対し，$x\overset{\alpha}{\sim}y$ が成り立つとき x は y と**関係**するとよび，$x\sim y$ で

表す．集合 $\{x\in X : x\sim x\}$ を R で表し，f の**鎖回帰集合**という．$\Omega(f)\subset R$ は定義から明らかである．

定理 15·1 コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が擬軌道追跡性をもてば，$\Omega(f)=R$ である．

証明 任意の $\alpha>0$ に対し，$\delta>0$ を擬軌道追跡性の定義にあらわれる数とする．任意の $x\in R$ に対し，R の定義によって f の δ-有限軌道

$$x_0=x, x_1, \cdots, x_k=x$$

が存在する．よって

$$d(f^i(y), x_i)<\alpha \quad (0\leqslant i\leqslant k)$$

を満たす $y\in X$ が存在する．ゆえに

$$U_\alpha(x)\cap f^{-k}(U_\alpha(x))\neq\phi$$

である．すなわち $x\in\Omega(f)$ が得られる．

定理 15·2 コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が擬軌道追跡性をもてば，$\Omega(f)$ への f の制限 $f_{|\Omega(f)}$ もその性質をもつ．

証明に入る前に補題を準備しよう．f の周期点全体の集合を $P(f)$ で表す．

補題 15·1 任意の $\alpha>0$ に対し，すべての $x\in\Omega(f)$ は点 $f(x)$ と α-関係にある $(x\overset{\alpha}{\sim}f(x))$．

証明 $x\in P(f)$ であれば命題は正しい．$x\notin P(f)$ の場合

$$d(x,z)<\gamma \quad\Rightarrow\quad \max\{d(f(z),f(x)), d(f^2(z),f^2(x))\}<\alpha$$

となるように $0<\gamma<\alpha$ なる γ を選ぶことができる．$x\in\Omega(f)$ より，$l\geqslant 3$ が存在して

$$f^{-l}(U_\gamma(x))\cap U_\gamma(x)\neq\phi$$

とできる．よって，ある $z\in U_\gamma(x)$ に対し $f^l(z)\in U(x)$ が成り立つ．ゆえに

$$\{f(x), f^2(z), \cdots, f^{l-1}(z), x\}$$

は $f(x)$ から x への α-軌道である．$\{x, f(x)\}$ は x から $f(x)$ への α-軌道であるから，x は $f(x)$ と α-関係にある．

補題 15・2 $\alpha>0$ とする．$\Omega(f)$ に含まれる点列 $\{x^i : i\geqq 1\}$ が x^0 に収束する $(x^i\to x^0, i\to\infty)$ と仮定する．このとき，すべての $i\geqq 1$ に対し $x^i \overset{\alpha}{\sim} x^{i+1}$ ならば，$x^i \overset{\alpha}{\sim} x^0 (i\geqq 1)$ である．

証明 すべての $j\geqq J$ に対して $d(x^j, x^0)<\alpha/2$ となる $J>0$ が存在する．$\Omega(f)=R$ であるから，x^J から x^0, x^0 から x^J への α-軌道を構成することができる．よって $x^J \overset{\alpha}{\sim} x^0$ である．任意の $i\geqq 1$に対し，$x^i \overset{\alpha}{\sim} x^J$ であるから，$x^i \overset{\alpha}{\sim} x^0$ が求まる．

任意に $\varepsilon>0$ を固定する．擬軌道追跡性の定義にあらわれる数を $\delta>0$ とし，$\Omega(f)$ における δ-関係によって $\Omega(f)$ を類別するとき，$\Omega(f)$ は類 A_λ の和集合

$$\Omega(f)=\bigcup_\lambda A_\lambda$$

で表される．補題 15・1 により，各類 A_λ は f-不変集合（$f(A_\lambda)=A_\lambda$）で，補題 15・2 により，A_λ は閉集合である．次の補題 15・3 と $\Omega(f)$ のコンパクト性によって，類の族 $\{A_\lambda\}$ は有限である．すなわち

$$\Omega(f)=\bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

補題 15・3 各 A_λ は $\Omega(f)$ の開集合である．

証明 任意の点 $x\in A_\lambda$ を固定する．任意の $y\in A_\lambda$ に対し δ-有限軌道

$$x_0=x, x_1, \cdots, x_p=y$$

が $\Omega(f)$ に存在する．

$$f(U_\gamma(x_0))\subset U_\delta(x_1)$$

を満たすように $0<\gamma<\delta/3$ なる γ を選ぶ．ここに $U_\gamma(x_0), U_\delta(x_1)$ は X の開近傍である．任意の $x_0'\in U_\gamma(x_0)\cap\Omega(f)$ に対し，$\{x_0', x_1, \cdots, x_p\}$ は $\Omega(f)$ の δ-軌道である．x, y は A_λ の点であるから，$\Omega(f)$ の中で y から x への δ-有限軌道

$$\{y_0=y, y_1, \cdots, y_l=x\}=\theta$$

を選ぶことができる．もし $f(y_{l-1})\in\overline{U_\gamma(x_0)}\cap\Omega(f)$ ならば

$$d(f(y_{l-1}), x_0')\leqq 2\gamma<\delta$$

から

$$(\theta\setminus\{y_l\})\cup\{x_0'\}=\{y_0, y_1, \cdots, y_{l-1}, x_0'\}$$

は δ-軌道である．よって $y\overset{\delta}{\sim}x_0'$ となる．もし $f(y_{l-1})\notin\overline{U_\gamma(x_0)}\cap\Omega(f)$ のとき

$$d(f(y_{l-1}), \overline{U_\gamma(x_0)}\cap\Omega(f))=d(f(y_{l-1}), z)<\delta$$

なる $z\in\overline{U_\gamma(x_0)}\cap\Omega(f)$ が存在する．よって

$$d(x_0', z)\leqslant 2\gamma.$$

$z\in\Omega(f)=R$ であるから，$z\sim z$ を得る．すなわち γ-有限軌道

$$\{z_0=z, z_1, \cdots, z_{b+1}=z\}$$

が $\Omega(f)$ の中に存在する．

$$d(f(z_b), x_0')\leqslant d(f(z_b), z)+d(z, x_0')\leqslant 3\gamma<\delta$$

であるから，点列

$$(\theta\setminus\{y_l\})\cup\{z_0, \cdots, z_b, x_0'\}=\{y_0, \cdots, y_{l-1}, z_0, \cdots, x_0'\}$$

は y_0 から x_0' への δ-軌道である．ゆえに $x_0'\in A_\lambda$．x_0' は $U_\gamma(x_0)$ の任意の点であるから，$U_\gamma(x_0)\cap\Omega(f)\subset A_\lambda$ を得る．

定理 15・2 の証明　ε と δ は上のように選ばれているとする．各 A_i は $\Omega(f)$ の開かつ閉集合であるから，$i\neq j$ のとき

$$d(A_i, A_j)=\inf\{d(a, b): a\in A_i, b\in A_j\}>0$$

である．いま

$$\delta_1=\min\{d(A_i, A_j): i\neq j\}$$

とおく．$0<\alpha<\min\{\delta, \delta_1\}$ なる α に対し，$\{x_i\}$ は $\Omega(f)$ の点列で f の α-軌道とする．このとき $\{x_i\}$ の f による ε-追跡点が $\Omega(f)$ に存在することを示そう．

補題 15・1 より，$\{x_i\}$ はある A_λ に属することがわかる．$x_a, x_b\in\{x_i\}(a<b)$ を選ぶとき，$x_a\overset{\delta}{\sim}x_b$ であるから，x_a から x_b への 1 つの δ-軌道として

$$x_a, x_{a+1}, \cdots, x_{b-1}, x_b$$

を選び，x_b から x_a への δ-軌道として

$$x_b=y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}, y_k=x_a$$

を選ぶ．この 2 つの δ-軌道を合併して，周期 $l=b-a+k$ をもつ δ-周期軌道 $\{z_i$：

$i\in\boldsymbol{Z}\}$ を構成する（ただし $z_0=x_a$ とする）．f は擬軌道追跡性をもつから，$\{z_i\}$ に対し $y_{a,b}\in X$ が存在して

$$d(f^i(y_{a,b}),z_i)<\varepsilon \quad (i\in\boldsymbol{Z})$$

とできる．よって

$$d(f^{li+j}(y_{a,b}),z_j)<\varepsilon \quad (i\in\boldsymbol{Z},\ 0\leqslant j<l).$$

特に

$$d(f^j(y_{a,b}),x_{a+j})<\varepsilon \quad (a\leqslant j\leqslant b-a)$$

であることに注意する．もし $D=\overline{\{f^{li}(y_{a,b}):i\in\boldsymbol{Z}\}}$ が離散的であるとき，Xがコンパクトであるから，閉集合 D もコンパクトである．ゆえに D は有限集合である．よって，$f^m(y_{a,b})=y_{a,b}$ なる $m>0$ が存在する．すなわち $y_{a,b}\in P(f)\subset\Omega(f)$ である．D が離散的でないとき，部分列 $\{f^{li'}(y_{a,b})\}$ が存在して

$$f^{li'}(y_{a,b})\longrightarrow y'_{a,b} \quad (i'\to\infty)$$

とできる．

$$d(f^{li}(y_{a,b}),z_0)=d(f^{li}(y_{a,b}),x_a)<\varepsilon \quad (i\in\boldsymbol{Z})$$

から

$$d(y'_{a,b},x_a)\leqslant\varepsilon,\ d(f^j(y'_{a,b}),z_j)\leqslant\varepsilon \quad (j\in\boldsymbol{Z})$$

である．このとき $y'_{a,b}\in\Omega(f)$ を示そう．

任意の $\alpha'>0$ に対し，$J>0$ が存在して $i'\geqslant J$ に対し

$$d(f^{li'}(y_{a,b}),y'_{a,b})<\alpha'$$

とできる．よって

$$w_0=y'_{a,b},\ w_1=f^{lJ}(y_{a,b}),\ w_2=f^{lJ+1}(y_{a,b}),\cdots,$$
$$w_{l+1}=f^{l(J+1)}(y_{a,b})\ \ w_{l+2}=y'_{a,b}$$

とおくと，点列$\{w_0,w_1,\cdots,w_{l+2}\}$ は α-軌道で，$w_0=w_{l+2}$ であるから

$$y'_{a,b}\overset{\alpha}{\sim}y'_{a,b}$$

である．α は任意だから，$y'_{a,b}\sim y'_{a,b}$．よって $y'_{a,b}\in\Omega(f)=R$ である．a を固定して部分列 $\{y'_{a,b}\}$ が $b\to+\infty$ なるとき，$y'_{a,b}$ はある $y_a\in\Omega(f)$ に収束する．よって $a\leqslant i$ なるすべての i に対し

$$d(f^i(y_a),x_{a+i})\leqslant\varepsilon$$

が求まる．ゆえに，補題11・2によって，α-軌道 $\{x_i\}$ を ε-追跡する点が存在する．以上から，$f_{|\Omega(f)}$ は擬軌道追跡性をもつ．

次の定理を同相写像のスペクトル分解定理という.

定理 15·3 (Smale 分解)　コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 $f: X\to X$ が拡大性かつ擬軌道追跡性をもてば, $\Omega(f)$ の閉部分集合の有限列 B_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ が存在して次が成り立つ.

(i)　$f(B_i)=B_i$, $B_i\cap B_j=\phi$　$(i\neq j)$

(ii)　$\Omega(f)=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$

(iii)　$f: B_i\to B_i$ は位相推移的

この定理は次の3つの補題から得られる.

コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f に対し, $\Omega(f)\subset R$ であるから, f を $\Omega(f)$ に制限するとき, 関係～によって $\Omega(f)$ は類別される. それらの類を B_λ で表すと, $\Omega(f)=\bigcup_\lambda B_\lambda$ である. 補題15·1, 15·2 によって, 各 B_λ は閉集合で $f(B_\lambda)=B_\lambda$ である.

補題 15·5　$\Omega(f)$ の周期点の集合 $P(f)$ は $\Omega(f)$ で稠密である.

証明　$\Omega(f)=R$ であるから, 任意の $x\in\Omega(f)$ に対し, x から x への δ-有限軌道 $\{x=x_0, x_1, \cdots, x=x_k\}$ が存在する. ここに $\delta>0$ は任意である.

$$y_{ki+j}=x_j\quad(i\in\boldsymbol{Z}, 0\leqslant j\leqslant k-1)$$

とおくと, $\{y_n: n\in\boldsymbol{Z}\}$ は δ-周期軌道である. 仮定によって, $f: X\to X$ は擬軌道追跡性をもつから, δ-軌道 $\{y_n\}$ に対し, ε-追跡点 $y\in X$ が存在し

$$d(f^n(y), y_n)<\varepsilon\quad(n\in\boldsymbol{Z})$$

が成り立つ. ゆえに任意の $l\in\boldsymbol{Z}$ に対し

$$d(f^l\circ f^k(y), f^l(y))\leqslant d(f^{l+k}(y), y_{l+k})+d(y_{l+k}, f^l(y)).$$

$l=ki+j$, $i\in\boldsymbol{Z}$, $0\leqslant j\leqslant k-1$ と表すと

$$y_{l+k}=y_{k(i+1)+j}=x_j=y_{ki+j}=y_l$$

である. ゆえに

$$d(f^l\circ f^k(y), f^l(y))<2\varepsilon$$

がすべての $l\in\boldsymbol{Z}$ に対して成り立つ. よって, 2ε は f の拡大定数より小さくなるように選べば, $f^k(y)=y$ が求まる. $d(y,x)<\delta$ であるから, 点 x は周期

点で近似される．すなわち，$P(f)$ は $\Omega(f)$ で稠密である．

次の補題 15·6 により，類の族 $\{B_\lambda\}$ は有限である．すなわち $\Omega(f)=\bigcup_{i=1}^{k}B_i$ である．

補題 15·6 各 B_λ は $\Omega(f)$ の開集合である．

証明 $\delta>0$ は擬軌道追跡性の定義にあらわれる数とし

$$U_\delta(B_\lambda)=\{y\in\Omega(f):d(y,B_\lambda)<\delta\}$$

とおく．$P(f)$ は $\Omega(f)$ で稠密であるから，任意の $p\in U_\delta(B_\lambda)\cap P(f)$ に対し

$$d(y,p)<\delta$$

なる $y\in B_\lambda$ が存在する．p は周期点であるから，$f^k(p)=p$ としよう．$f:X\to X$ は擬軌道追跡性をもつから，定理 12·2 により

$$W^u(p,d)\cap W^s(y,d)\neq\phi,\quad W^s(p,d)\cap W^u(y,d)\neq\phi$$

が成り立つ．$z\in W^u(p,d)\cap W^s(y,d)$ に対し

$$d(f^{-j}(z),f^{-j}(p))\to 0\quad(j\to\infty),\quad d(f^j(z),f^j(y))\to 0\quad(j\to\infty)$$

である．よって任意の $\alpha>0$ に対し，$J>0$ が存在してすべての $j\geqq J$ に対し

$$d(f^{-jk+1}(z),f(p))=d(f^{-jk+1}(z),f^{jk+1}(p))<\alpha,\ d(f^{jk}(z),f^{jk}(y))<\alpha$$

とできる．$j>J$ を固定して，p から z への α-有限軌道

$$\{p,f^{-jk+1}(z),f^{-jk+2}(z),\cdots,f^{-1}(z),z\}$$

を Γ_1, z から $f^{jk}(y)$ への α-有限軌道

$$\{z,f(z),\cdots,f^{jk-1}(z),f^{jk}(y)\}$$

を Γ_2 とする．

$$y,f^{jk}(y)\in B_\lambda\subset\Omega(f)=R$$

であるから，$f^{jk}(y)$ から y への α-有限軌道 Γ_3 が存在する．よって，$\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ は p から y への α-有限軌道である．$W^s(p,d)\cap W^u(y,d)\neq\phi$ から，まったく同じようにして，y から p への α-有限軌道が構成できる．よって，$p\overset{\alpha}{\sim}y$ が成り立つ．$\alpha>0$ は任意であるから，$p\sim y$ が求

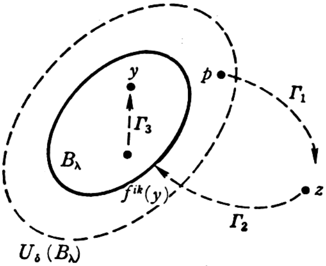


図 5·5

まる．ゆえに $y\in B_\lambda$ より $p\in B_\lambda$ である．

$$B_\lambda\supset\overline{U_\delta(B_\lambda)\cap p(f)}\supset U_\delta(B_\lambda)\cap\overline{p(f)}=U_\delta(B_\lambda)\cap\Omega(f)$$

から，$B_\lambda=U_\delta(B_\lambda)$ が成り立つ．B_λ は開集合である．

補題 15・7 各 B_i への f の制限 $f_{|B_i}$ は位相推移的である．

証明 各 B_i は $\Omega(f)$ の開かつ閉集合であるから，$f: B_i\to B_i$ は擬軌道追跡性をもつ（定理 15・2 を使う）U, V は B_i の中で空でない開集合とする．$x\in U$ と $y\in V$ に対し，$x\sim y$ なる関係から，x から y への擬軌道に対し，U の中に追跡点が選べる．このことは $V\cap f^i(U)\neq\phi$ なる $i\geqq 0$ の存在を示している．

任意の空でない開集合 U, V に対し，自然数 N が存在して，すべての $n\geqq N$ に対し

$$U\cap f^n(V)\neq\phi$$

を満たすとき，f は**位相混合的**であるという．位相混合的ならば，位相推移的であることは明らかである．

定理 15・3 はさらに次のように分解される．

定理 15・4（Bowen 分解） B_i は定理 15・3 のものとする．このとき B_i の閉部分集合 C と自然数 $a>0$ が存在して

(i) $f^a(C)=C$

(ii) $C\cap f^j(C)=\phi\quad(0<j<a)$

(iii) $f^a: C\to C$ は位相混合的である

(iv) $B_i=\bigcup_{j=0}^{a-1}f^j(C)$

が成り立つ．

定理は次の 3 つの補題から導かれる．

補題 15・8 $p\in B_i\cap P(f)$ に対し，$C_p=\overline{W^u(p,d)\cap B_i}$ を定義する．このとき C_p は B_i の開集合である．

証明 $m>0$ は点 p の周期（$f^m(p)=p$）としよう．任意の $\varepsilon>0$ に対して

$\delta>0$ は f の擬軌道追跡性の定義にあらわれる数とし

$$q\in U_\delta(C_p)\cap P(f)$$

なる点 q の周期を $n>0$ とする．このとき $C_p=\overline{W^u(p,d)\cap B_i}$ であるから，$d(q,x)<\delta$ を満たす $x\in W^u(p,d)\cap B_i$ が存在する．$f: B_i\to B_i$ は擬軌道追跡性をもつから，δ-軌道

$$\{\cdots,f^{-2}(x),f^{-1}(x),q,f(q),f^2(q),\cdots\}$$

に対して，ε-追跡点 $x'\in B_i$ が存在する．すなわち

$$x'\in W_\varepsilon^u(x,d)\cap W_\varepsilon^s(q,d)\cap B_i\subset W^u(x,d)\cap W^s(q,d)\cap B_i$$

である．$x\in W^u(p,d)$ であるから

$$W^u(p,d)=W^u(x,d)$$

が成り立つ．ゆえに

$$f^{kmn}(x')\in f^{kmn}(W^u(p,d))=W^u(p,d)$$

がすべての $k>0$ に対し成り立つ．一方

$$d(f^{kmn}(x'),f^{kmn}(q))=d(f^{kmn}(x'),q)\to 0\quad(k\to\infty)$$

である．よって

$$q\in\overline{W^u(p,d)\cap B_i}=C_p.$$

すなわち $U_\delta(C_p)=C_p$ である．

$f^m(p)=p$ であるから，$f^m(C_p)=C_p$ が成り立つ．よって $f^a(C_p)=C_p$ なる最小の $0<a\leqq m$ が存在する．$f: B_i\to B_i$ は定理 15・3 によって位相推移的であるから

$$B_i=C_p\cup f(C_p)\cup\cdots\cup f^{a-1}(C_p)$$

が成り立つ．

補題 15・9 任意の $q\in C_p\cap P(f)$ に対し，$C_p=C_q$ である．

証明 補題 15・8 の証明のように $U_\delta(C_p)=C_p$ が成り立つから

$$W_\delta^u(q,d)\subset C_p$$

である．p,q は周期点であるから，$f^m(p)=p, f^n(q)=q$ としよう．このとき定理 9・1 によって

$$W^u(q,d)=\bigcup_{j\geqq 0}f^{mnj}(W_\delta^u(q,d).$$

よって $C_q \subset C_p$ である．いま $p \notin C_q$ と仮定しよう．このとき $K = C_p \setminus C_q$ とおくと，K と C_q はともにコンパクトであるから

$$d(K, C_q) > 0$$

である．点 q は $C_p = \overline{W^u(p, \mathcal{U}) \cap B_i}$ に含まれているから

$$0 < d(z, q) < d(K, C_q)$$

を満たす $z \in W^u(p, d) \cap B_i$ が存在する．明らかに $z \in C_q$ である．一方

$$d(f^{-mnj}(z), p) = d(f^{-mnj}(z), f^{-mnj}(p)) \to 0 \quad (j \to \infty).$$

ゆえに，十分大きな j に対し $f^{-mnj}(z) \notin C_q$ である．よって

$$z \notin f^{mnj}(C_q) = C_q$$

となり $z \in C_q$ に矛盾する．

補題 15・10　$f^a : C_p \to C_p$ は位相混合的である．

証明　U, V は C_p の空でない開集合とする．任意の $p' \in C_p \cap P(f)$ に対し，$C_p = C_{p'}$ であるから，$q \in V \cap P(f)$ に対し

$$U \cap W^u(f^{-aj}(q), d) \neq \phi \quad (j \in \boldsymbol{Z})$$

が成り立つ．$l > 0$ は点 q の周期（$f^l(q) = q$）としよう．このとき $0 \leqq j \leqq l-1$ なる j に対し

$$z_j \in U \cap W^u(f^{-aj}(q), d)$$

なる点 z_j が存在する．よって

$$f^{-alt}(z_j) \to f^{-aj}(q) \quad (t \leftarrow \infty)$$

である．明らかに，$f^{-aj}(q) \in f^{-aj}(V)$．$0 \leqq j \leqq l-1$ なる j を固定するとき，$N_j > 0$ が存在して，すべての $t \geqq N_j$ に対し

$$f^{-alt}(z_j) \in f^{-aj}(V)$$

が成り立つ．

$$N = \max\{N_j : 0 \leqq j \leqq l-1\}$$

とおく．$t = ls + j$ $(0 \leqq j \leqq l-1)$ なる t に対し，$s \geqq N$ のとき

$$f^{-at}(z_j) = f^{-als-aj}(z_j) \in f^{-aj}(V)$$

である．$z_j \in U$ であるから，$f^{-at}(V) \cap U \neq \phi$ $(t \geqq Nl)$ が成り立つ．

定理 15・5　$\Omega(f)$ はコンパクト距離空間 (X, d) の上の拡大性と擬軌道追跡性をもつ同相写像 f の非遊走集合とする．このとき，$f:\Omega(f)\to\Omega(f)$ が位相推移的で，さらに $f(p)=p$ なる点 $p\in\Omega(f)$ が存在すれば，$f_{|\Omega(f)}$ は位相混合的である．

証明　点 $p\in\Omega(f)$ は不動点であるから，$\Omega(f)$ の開かつ閉集合 C_p は $f(C_p)=C_p$ である．$f_{|\Omega(f)}$ は位相推移的であるから，$C_p=\Omega(f)$ でなくてはならない．ゆえに，定理 15・4 によって $f_{|\Omega(f)}$ は位相混合的である．

注意 15・1　コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が拡大性と擬軌道追跡性をもち，非遊走集合 $\Omega(f)$ への f の制限が位相推移的であるとする．このとき $X=\Omega(f)$ が成り立つ．

証明　上の条件のもとで，$\Omega(f)\subsetneqq X$ を仮定して $X\setminus\Omega(f)$ に周期点が存在することを示すことによって矛盾を導びけばよい．

任意の $x_0\in X\setminus\Omega$ に対し，ω-極限集合，α-極限集合が $\overline{O_f(x_0)}$ と $\Omega(f)$ の両方の集合に含まれるから，$\overline{O_f^+(x_0)}\cap\Omega(f)\neq\phi$, $\overline{O_f^-(x_0)}\cap\Omega(f)\neq\phi$ が成り立つ．$\Omega(f)$ はコンパクトであるから，$0<\varepsilon<d(x_0, \Omega(f))$ なる ε が選べる．この ε に対し，$\delta>0$ を擬軌道追跡性の定義にあらわれる実数とする．このとき，十分大きな自然数 n が存在して，$d(\Omega(f), f^n(x_0))<\delta$, $d(\Omega(f), f^{-n}(x_0))<\delta$ とできる．すなわち，$d(x_{n+1}, f^n(x_0))<\delta$, $d(f(x_{-n-1}), f^{-n}(x_0))<\delta$ となるような点 $x_{n+1}, x_{-n-1}\in\Omega(f)$ が存在する．

よって，x_{-n-1} から x_{n+1} への δ-有限軌道 $\{x_{-n-1}, f^{-n}(x_0), f^{-n+1}(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0), x_{n+1}\}$ が構成できる．ところで，f は $\Omega(f)$ の上で位相推移的であるから，$\Omega(f)$ の中で x_{n+1} から x_{-n-1} への δ-有限軌道 $\{x_{n+1}, \tilde{x}_{n+2}, \cdots, \tilde{x}_{-n+1}, \tilde{x}_{-n}, x_{-n-1}\}$ が存在する．(図 5・6 参照)

これら 2 つの δ-有限軌道を合併して，δ-周期軌道を作ることができる．

$$\{x_{-n-1}, f^{-n}(x_0), f^{-n+1}(x_0), \cdots, x_0, f(x_0), \cdots,$$
$$f^{n-1}(x_0), x_{n+1}, \tilde{x}_{n+2}, \cdots, \tilde{x}_{-n+1}, \tilde{x}_{-n}, x_{-n-1}\}.$$

f は X の上で擬軌道追跡性をもつから，この δ-周期軌道を ε-追跡する点 $y\in X$ を選ぶことができる．拡大性の条件によって，点 y は周期点であることがわかる．$d(x_0, \Omega(f))>\varepsilon$ であるから，$y\notin\Omega(f)$ が確かめられ矛盾を得る．

注意 15·2　コンパクト距離空間 X の上の同相写像 f が拡大性と擬軌道追跡性の条件をもっていても，一般に $\Omega(f)$ は X と一致しない．

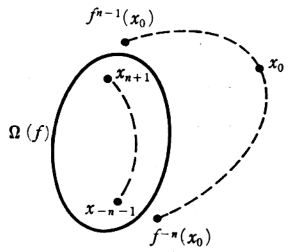


図 5·6

例えば，$Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ は (11·1) によって定義された距離関数 d をもつコンパクト空間とする．$Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ は完全不連結である．$Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ の部分集合 S は長さ2のブロックの族 $C=\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ によって定義されているとする．すなわち

$$S=\{(x_i)\in Y_2^{\boldsymbol{Z}} : (x_i, x_{i+1})\in C,\ i\in\boldsymbol{Z}\}.$$

このとき，$\sigma_{|S} : S\to S$ は次数1の有限型の部分推移写像である．定理 11·7 により $\sigma_{|S}$ は擬軌道追跡性をもつ．さらに補題 15·5 により周期点の集合 $P(\sigma_{|S})$ は $\Omega(\sigma_{|S})$ で稠密である．実際に S の周期点は2点 $x=(\cdots, 0, 0, 0, \cdots)$，$y=(\cdots, 1, 1, 1, \cdots)$ だけである．一方，$Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ の点 $z=(\cdots, 0, 0, 1, 1, \cdots)$ は S の点であって周期点ではない．ゆえに $z\notin P(\sigma_{|S})=\Omega(\sigma_{|S})$，すなわち $\Omega(\sigma_{|S})\subsetneqq S$ である．

特に，Xが連結である場合 $\Omega(f)$ は X と一致するかどうかは解明されていない．

コンパクト距離空間 (X, d) の上の拡大的同相写像 f の非遊走集合 $\Omega(f)$ の上で f が擬軌道追跡性の条件をもっているとき，$\Omega(f)$の外側の f の挙動を調べてみよう．

定理 15·6　f は上のように仮定されているとする．このとき $\Omega(f)$ を含む適当な近傍 U に対して

$$\cap\{f^n(U) : n\in\boldsymbol{Z}\}=\Omega(f)$$

が成り立つ．

証明　$f_{|\Omega(f)}$ は拡大的である．$\varepsilon>0$ をその拡大定数とする．また，$f_{|\Omega(f)}$ は擬軌道追跡性を満たすから，十分小さい $\beta\,(0<\beta<\varepsilon/2)$ に対し，適当な$\alpha>0$ があって，$\Omega(f)$ の任意の α-軌道は，適当な $\Omega(f)$ の点で β-追跡される．また f は一様連続であるから，十分小さい $\gamma\,(0<\gamma<\min\{\alpha/2, \varepsilon/2\})$ を選ぶと

$$d(x, y)<\gamma\,(x, y\in X) \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y))<\alpha/2$$

とできる．いま

$$U=\{y\in X : d(y, \Omega(f))<\gamma\}$$

とおくと，U は $\Omega(f)$ の近傍である．

$\cap\{f^n(U) : n\in\boldsymbol{Z}\}\ni y$ とすると，任意の $i\in\boldsymbol{Z}$ に対して，$f^i(y)\in U$ である．ゆえに各 $i\in\boldsymbol{Z}$ に対し

$$d(f^i(y), x_i)<\gamma$$

となる点 $x_i\in\Omega(f)$ が存在する．よって

$$d(f(x_i), x_{i+1})\leqslant d(f(x_i), f^{i+1}(y))+d(f^{i+1}(y), x_{i+1})$$
$$<\alpha/2+\gamma<\alpha$$

が成り立つ．すなわち，$\{x_i : i\in\boldsymbol{Z}\}$ は $\Omega(f)$ に含まれる α-軌道である．これを β-追跡する点を $x\in\Omega(f)$ とすると

$$d(f^i(y), f^i(x))\leqslant d(f^i(y), x_i)+d(x_i, f^i(x))<\gamma+\beta<\varepsilon$$

がすべての $i\in\boldsymbol{Z}$ に対して成り立つ，ゆえに $x=y$ である．したがって $y\in\Omega(f)$ となり，$\cap\{f^n(U) : n\in\boldsymbol{Z}\}\subset\Omega(f)$ が成り立つ．逆の包含関係は明らかである．

f をコンパクト距離空間の上の同相写像，A を X の部分集合，ε を正数とするとき

$$W^s(A)=\cup\{W^s(x, d) : x\in A\}, \quad W^u(A)=\cup\{W^u(x, d) : x\in A\},$$
$$W_\varepsilon^s(A)=\cup\{W_\varepsilon^s(x, d) : x\in A\}, \quad W_\varepsilon^u(A)=\cup\{W_\varepsilon^u(x, d) : x\in A\}$$

が定義される．

定理 15・7 f は定理15・6と同じ条件であるとし，$\Omega(f)=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_l$ を Smale 分解とすると，各 Ω_j に対して

$$W^s(\Omega_j)=\{x\in X : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \Omega_j)=0\},$$
$$W^u(\Omega_j)=\{x\in X : \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), \Omega_j)=0\}$$

が成り立つ．また，十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対し，適当な Ω_j の近傍 U_j が存在して

$$\cap\{f^{-k}(U_j):k\geqq 0\}\subset W_\varepsilon^s(\Omega_j),$$
$$\cap\{f^{k}(U_j):k\geqq 0\}\subset W_\varepsilon^u(\Omega_j)$$

が成り立つ．

証明　$f_{|\Omega(f)}$ が擬軌道追跡性を満たし，Ω_j は f-不変であるから，$f_{|\Omega_j}$ も擬軌道追跡性を満たす．これは Ω_j は $\Omega(f)$ の開かつ閉集合であることからわかる．十分小さい $\varepsilon>0$ に対し，適当な $\alpha>0$ が存在して Ω_j の任意の α-軌道は Ω_j のある点で $\varepsilon/2$-追跡される．

f は一様連続であるから，適当な $\gamma\,(0<\gamma<\min\{\alpha/2,\varepsilon/2\})$ を選ぶと，次が成り立つようにできる．

(15·1)　$d(x,y)<\gamma \;\Rightarrow\; d(f(x),f(y))<\alpha/2.$

いま，$\lim_{n\to\infty} d(f^n(y),\Omega_j)=0,\ y\in X$ とすると，$N>0$ が存在して

$$n\geqq N \;\Rightarrow\; d(f^n(y),\Omega_j)<\gamma$$

が成り立つ．ゆえに

(15·2)　$n\geqq N \;\Rightarrow\; d(x_n,f^n(y))<\gamma$

となる $x_n\in\Omega_j$ が存在する．そこで，$n<N$ に対し $x_n=f^{n-N}(x_N)$ とおくと，$\{x_n:n\in\boldsymbol{Z}\}$ は Ω_j の α-軌道である．

実際に，(15·1)，(15·2) から $n\geqq N$ ならば

$$\begin{aligned}d(f(x_n),x_{n+1})&\leqq d(f(x_n),f^{n+1}(y))+d(f^{n+1}(y),x_{n+1})\\&\leqq\alpha/2+\gamma<\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．また $n<N$ のとき

$$d(f(x_n),x_{n+1})=d(f(x_n),f(x_n))=0<\alpha$$

である．そこで，$\{x_n:n\in\boldsymbol{Z}\}$ を $\varepsilon/2$-追跡する点 $x\in\Omega_j$ をとると，任意の $i\geqq 0$ に対し

$$\begin{aligned}d(f^i\circ f^N(y),f^i\circ f^N(x))&\leqq d(f^{i+N}(y),x_{i+N})+d(x_{i+N},f^{i+N}(x))\\&\leqq\gamma+\varepsilon/2<\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ（ここで (15·2) を用いた)，ゆえに

$$f^N(y)\in W_\varepsilon^s(f^N(x),d)\subset W^s(f^N(x),d)$$

が成り立つ．すなわち

$$y\in f^{-N}(W^s(f^N(x),d))$$

である．定義から $f^{-N}(W^s(f^N(x,d))=W^s(x,d)$ が成り立つことがわかる．ゆえに

$$y\in W^s(x,d)\subset\cup\{W^s(x,d):x\in\Omega_j\}=W^s(\Omega_j)$$

である．したがって

$$\{y\in X:\lim_{n\to\infty}d(f^n(y),\Omega_j)=0\}\subset W^s(\Omega_j)$$

が成り立つ．逆の包含関係は $W^s(\Omega_j)$ の定義から直ちに導かれる．

次に

$$U_j=\{y\in X:d(y,\Omega_j)<\gamma\}$$

とおくと，これは Ω_j の近傍である．$\cap\{f^{-k}(U_j):k\geqslant0\}\ni z$ とすると，任意の $k\geqslant0$ に対し，$f^k(z)\in U_j$ である．したがって，$d(f^k(z),\Omega_j)<\gamma$．ゆえに

$$(15\cdot3)\quad k\geqslant0\ \Rightarrow\ d(f^k(z),y_k)<\gamma$$

となる $y_k\in\Omega_j$ が存在する．いま，$y_{-i}=f^{-i}(y_0),i>0$ とおくと，$\{y_k:k\in\mathbf{Z}\}$ は Ω_j の α-軌道であることが前と同様に証明できる．これを $\varepsilon/2$-追跡する点を $x\in\Omega_j$ とすると，$k\geqslant0$ のとき (15·3) から

$$d(f^k(x),f^k(z))\leqslant d(f^k(x),y_k)+d(y_k,f^k(z))\leqslant\varepsilon/2+\gamma<\varepsilon$$

を得る．ゆえに $z\in W_\varepsilon^s(x,d)\subset W_\varepsilon^s(\Omega_j)$．すなわち $\cap\{f^{-k}(U_j):k\geqslant0\}\subset W_\varepsilon^s(\Omega_j)$ である．残りの包含関係についても同様に証明できる．

定理 15·8　上の定理と同じ仮定のもとで，任意の $y\in X$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}d(f^n(y),\Omega_i)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}d(f^{-n}(y),\Omega_j)=0$$

が成り立つような Ω_i および Ω_j がただ1つ存在する．したがって

$$X=\bigcup_{i=1}^{l}W^s(\Omega_i)=\bigcup_{i=1}^{l}W^u(\Omega_i)$$

が成り立ち，$i\neq j$ ならば

$$W^s(\Omega_i)\cap W^s(\Omega_j)=\phi,\qquad W^u(\Omega_i)\cap W^u(\Omega_j)=\phi$$

である．

証明　$x\in X$ とする．X はコンパクトであるから，x の ω-極限集合は $\omega(x)\neq\phi$ である．また

$$\omega(x)\subset\Omega(f)=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_l$$

であるが，実は $\omega(x)\subset\Omega_i$ となる Ω_i がただ1つ存在することを示そう．

そのためには $\omega(x)$ と交わる Ω_i はただ1個であることを示せば十分である．いま，仮に $\omega(x)$ と交わるような2つの Ω_j と $\Omega_{j'}$ があるとして矛盾を導びこう．すなわち，次を仮定する．

$$(15\cdot4)\quad \omega(x)\cap\Omega_j\neq\phi,\qquad \omega(x)\cap\Omega_{j'}\neq\phi\quad (j\neq j')$$
$$\omega(x)\cap\Omega_i=\phi\quad (i\neq j, i\neq j').$$

$\{\Omega_i : 1\leqslant i\leqslant l\}$ は互いに交わらない閉集合だから，互いに交わらないような Ω_i の開近傍 $U_i(1\leqslant i\leqslant l)$ が存在する．$f(\Omega_i)=\Omega_i$ で U_i は Ω_i の近傍だから，Ω_i の適当な開近傍 V_i を選ぶと

$$(15\cdot5)\quad f(V_i)\subset U_i,\ f^{-1}(V_i)\subset U_i\quad (1\leqslant i\leqslant l)$$

が成り立つ（ここで Ω_i はコンパクトであることを用いた）．(15·4) から，$\{f^n(x) : n\geqslant0\}$ の適当な部分列 $\{f^{n_i}(x) : i\geqslant1\}, \{f^{m_i}(x) : i\geqslant1\}$ を選んで

$$(15\cdot6)\quad \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x)\in\Omega_j,\ \lim_{i\to\infty} f^{m_i}(x)\in\Omega_{j'}$$

とすることができる．さらに，必要ならば部分列を選ぶことによって

$$(15\cdot7)\quad n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots<n_i<m_i<n_{i+1}<\cdots$$

とすることができる．(15·6) から十分大きい I を選ぶと

$$(15\cdot8)\quad i\geqslant I \ \Rightarrow\ f^{n_i}(x)\in V_j,\ f^{m_i}(x)\notin V_{j'}$$

が成り立つ．すると (15·5), (15·7), (15·8) および $\{U_i : 1\leqslant i\leqslant l\}$ が互いに交わらないことから

$$i\geqslant I \ \Rightarrow\ n_i<l_i\leqslant m_i,\ f^{l_i}(x)\notin V_j\cup V_{j'}$$

となるような l_i が存在することがわかる．

$V_j\cup V_{j'}$ は開集合だから，$X\setminus(V_j\cup V_{j'})$ は閉集合である．$\{f^{l_i}(x) : i\geqslant1\}$ は $X\setminus(V_j\cup V_j')$ の点列である．X はコンパクトであるから，収束する部分列が存在する．その極限を z とすると

$$z\in X\setminus(V_j\cup V_{j'})\cup X\setminus(\Omega_j\cup\Omega_{j'})$$

で，かつ $z\in\omega(x)$ である．ゆえに，$z\in\Omega_k(k\neq j, j')$ なる Ω_k が存在する．これは (15·4) に矛盾する．以上で $\omega(x)$ を含む Ω_i がただ1つ存在することがわかった．

次に，$\omega(x)\subset\Omega_i$ なるとき，$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \Omega_i)=0$ を示そう．

もしこれが成り立たないとすると，$\varepsilon_0>0$ があって

$$d(f^n(x), \Omega_i) \geqq \varepsilon_0$$

となるような $n \geqq 0$ が無限に存在する．すなわち，$\{f^n(x) : n \geqq 0\}$ の適当な部分列 $\{f^{n_j}(x) : j \geqq 1\}$ が存在して

$$(15\cdot9)\quad d(f^{n_j}(x), \Omega_i) \geqq \varepsilon_0 \quad (j \geqq 1)$$

が成り立つ．また，必要ならば部分列を選んで，$\{f^{n_j}(x) : j \geqq 1\}$ は収束するとしてよい．その極限を z とおくと，(15·9) から

$$d(z, \Omega_i) \geqq \varepsilon_0$$

となる．$z \in \omega(x)$ であるから，これは $\omega(x) \subset \Omega_i$ に矛盾する．ゆえに $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \Omega_i) = 0$ である．残りの部分も同様に証明できる．

§16　明記性と周期点

コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f に対して，十分大きな周期の周期点がいつでも存在する場合を調べよう．

f が**明記性**をもつとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し自然数 $M(\varepsilon) = M$ が存在して，任意の有限点列

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$$

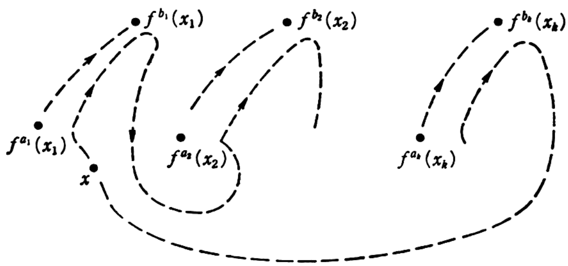


図 5·7

と $2 \leqq j \leqq k$ なる j に対し

$$a_j - b_{j-1} \geqq M$$

を満たす任意の整数列

$$a_1 \leqq b_1 < a_2 \leqq b_2 < \cdots < a_k \leqq b_k \text{ と } p \geqq M + (b_k - a_1)$$

なる任意の自然数 p に対し，$f^p(x)=x$ を満たす $x\in X$ が存在して

$$d(f^i(x), f^i(x_j))<\varepsilon \quad (a_j\leqslant i\leqslant b_j, 1\leqslant j\leqslant k)$$

を満すときをいう．

定理 16·1 $f: X\to X$ が明記性をもてば，f は位相混合的である．

証明 U, V は空でない X の開集合とする．このとき自然数 M があって，すべての $n\geqslant M$ に対し，$f^n(U)\cap V\neq\phi$ を示せばよい．

U から点 x を，V から点 y を選び十分小さな $\varepsilon>0$ に対し

$$U_\varepsilon(x)\subset U, \quad U_\varepsilon(y)\subset V$$

とできる．この ε に対し，$M(\varepsilon)=M>0$ を明記性の定義にあらわれる自然数とする．このとき任意の $n\geqslant M$ に対し $z\in X$ が存在して，$x_1=x$, $x_2=y$ に対し

$$d(z, x_1)=d(z, x)<\varepsilon, \ d(f^n(z), x_2)=d(f^n(z), y)<\varepsilon$$

とできる．よって $z\in f^{-n}(U_\varepsilon(y))$ であるから，$f^{-n}(U_\varepsilon(y))\cap U_\varepsilon(x)\neq\phi$ が成り立つ．ゆえに

$$\phi\neq U_\varepsilon(y)\cap f^n(U_\varepsilon(x))\subset V\cap f^n(U)$$

である．

f の n 周期点の集合を $P_n(f)$ で表そう．次の定理は f が明記性をもてば，十分大きな周期をもつ周期点を多数みつけることができることを保証している．

定理 16·2 f が明記性をもつとし，$\varepsilon>0$ に対し $M(\varepsilon)=M>0$ は明記性の定義にあらわれる自然数とする．このとき，任意の $p\geqslant M$ を周期にする周期点 $x\in X(f^p(x)=x)$ が存在し，$\bigcup_{m\geqslant M} P_m(f)$ は X で稠密である．

証明 任意の $x\in X$ に対し，$x=x_1=x_2$ とおく．$a_1=b_1=0$, $a_2=b_2=M$ とする．このとき，f は明記性をもつから，$p\geqslant M$ なる任意の p に対し，$f^p(y)=y$ を満たす $y\in X$ が存在して

$$d(x, y)=d(x_1, y)<\varepsilon, \ d(x_2, f^M(y))<\varepsilon$$

とできる．よって $y\in U_\varepsilon(x)$ である．

定理 16·3 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が次の条件をもつとする.

（1） f は位相混合的である

（2） f は拡大的である

（3） f は擬軌道追跡性をもつ

このとき f は明記性をもつ.

証明 $c>0$ は f の拡大定数とし，$0<\varepsilon<c/2$ なる任意の ε に対し，$\delta>0$ は擬軌道追跡性の定義にあらわれる数とする．δ-開球からなる X の有限被覆を u とする．f は位相混合的であるから，$U_i, U_j \in u$ に対し，自然数 M_{ij} が存在して，すべての $n \geqq M_{ij}$ に対し

$$f^n(U_i) \cap U_j \neq \phi$$

とできる.

$$M = \max\{M_{ij}\}$$

とおく．任意の有限点列

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$$

と $2 \leqq j \leqq k$ なる j に対し

$$a_j - b_{j-1} \geqq M$$

を満たす任意の整数列

$$a_1 \leqq b_1 < a_2 \leqq b_2 < \cdots < a_k \leqq b_k,$$

そして

$$p \geqq M + (b_k - a_1)$$

なる整数 p に対し

$$a_{k+1} = b_{k+1} = p + a_1, \quad x_{k+1} = f^{a_1 - a_{k+1}}(x_1)$$

とおく．さて任意の $z \in X$ に対し，点 z を含む u の元 U を $U(z)$ で表そう．このとき，$j = 1, 2, \cdots, k$ に対し

$$f^{a_{j+1} - b_j}(y_j) \in U(f^{a_{j+1}}(x_{j+1}))$$

を満たす $y_j \in U(f^{b_j}(x_j))$ が存在する．何故ならば，$1 \leqq j \leqq k$ なる j に対し，$a_{j+1} - b_j \geqq M$ より

$$U(f^{a_{j+1}}(x_{j+1})) \cap f^{a_{j+1} - b_j} U(f^{b_j}(x_j)) \neq \phi$$

が成り立つことから明らかである.

X の点列 $\{z_i\}$ を次の条件を満たすように定義しよう.

$$z_i = f^i(x_j) \qquad (a_j \leqslant i < b_j)$$
$$z_i = f^{i-b_j}(y_j) \qquad (b_j \leqslant i < a_{j+1})$$
$$z_{i+p} = z_i \qquad (i \in \boldsymbol{Z})$$

このとき $\{z_i\}$ は δ-周期軌道である. f は擬軌道追跡性をもつから, $x \in X$ が存在して

$$d(f^i(x), z_i) < \varepsilon \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

とできる. ところで, $z_{i+p} = z_i$ $(i \in \boldsymbol{Z})$ より

$$d(f^{i+p}(x), z_i) < \varepsilon \quad (i \in \boldsymbol{Z})$$

である. よって

$$d(f^i \circ f^p(x), f^i(x)) < 2\varepsilon < c \quad (i \in \boldsymbol{Z}).$$

だから拡大性によって $f^p(x) = x$ である. ゆえに f は明記性を満たす.

注意 16·1　コンパクト距離空間の上の同相写像が明記性をもち, かつ拡大的であっても擬軌道追跡性をもつとは限らない. この例を構成してみよう.

構成　前に扱った空間 $Y_k^{\boldsymbol{Z}}$ において $k=2$, すなわち $Y_2^{\boldsymbol{Z}} = \{0, 1\}^{\boldsymbol{Z}}$ とする. $Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ の上の距離関数 d を, $x = (x(i))$, $y = (y(i)) \in Y_2^{\boldsymbol{Z}}$ に対し

$$d(x, y) = \sum_{i \in \boldsymbol{Z}} (1 - \delta_{x(i)y(i)}) / 2^{|i|}$$

によって定義する. ここに δ_{ij} は Kronecker の記号である. 部分空間 S を

$$S = Y_2^{\boldsymbol{Z}} \setminus \bigcup_{i \in \boldsymbol{Z}} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in Y_2^{\boldsymbol{Z}} : x(i) = x(i+2k+1) = 0,$$
$$x(j) = 1, i < j \leqslant i + 2k\}$$

とする. S は閉集合で, 推移写像 σ に関して不変 ($\sigma(S) = S$) である. 明らかに $\sigma : S \to S$ は拡大的である.

$\sigma : S \to S$ は明記性を満たすが, 擬軌道追跡性を満たさないことを示そう. 最初に $\sigma_{|S}$ は明記性を満たすことを示す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $x, y \in S$ なる点 $x = (x(i))$, $y = (y(i))$ が

$$x(i) = y(i) \quad (|i| \leqslant n) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) < \varepsilon$$

となるように $n > 0$ を選ぶことができる. このとき明記性の定義にあらわれる自然数 $M(\varepsilon)$ として

$$M(\varepsilon)=2n+1$$

を選ぶことにする．任意の有限点列

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \in S$$

と $1\leqslant i\leqslant k-1$ なる i に対し

$$a_{i+1}-b_i\geqslant 2n+1$$

を満たす任意の整数列

$$a_1\leqslant b_1< a_2\leqslant b_2<\cdots< a_k\leqslant b_k$$

と

$$p\geqslant b_k-a_1+2n+1$$

なる任意の整数 p に対し，S の点 $x=(x(i))$ を次の条件を満たすように定義する．

（イ）　$x(j)=x_i(j)$　　$a_i-n<j<b_i+n$　$(1\leqslant i\leqslant k)$

（ロ）　$x(j)=0$　　$\begin{cases} b_i+n<j\leqslant a_{i+1}-n & (1\leqslant i\leqslant k-1) \\ b_k+n<j\leqslant a_1-n+p \end{cases}$

（ハ）　$x(b_i+n)=\begin{cases} 1 & \begin{cases} 1\leqslant i\leqslant k \text{ なる } i \text{ に対し，} b_i+n-2r>a_i-n \\ \text{なる } r\geqslant 1 \text{ があって，} x_i(b_i+n-2r-1)=0 \text{ で，} \\ b_i+n-2r\leqslant j<b_i+n \text{ なる } j \text{ に対しては，} x_i(j)=1 \end{cases} \\ 0 & \text{上のような } r\in\boldsymbol{Z} \text{ が存在しないとき} \end{cases}$

（ニ）　$x(j+mp)=x(j)$　$a_1-n<j\leqslant a_1-n+p$　$(m\in\boldsymbol{Z})$．

このとき $x\in S$ で，(ニ) より $\sigma^p(x)=x$ である．$1\leqslant i\leqslant k$ なる i に対し $a_i<j<b_i$ なるすべての j と $|m|<n$ なる m に対し，(イ) より

$$\sigma^j x(m)=x(j+m)=x_i(j+m)=\sigma^j x_i(m)$$

である．よって

$$d(\sigma^j(x), \sigma^j(x_i))<\varepsilon \quad (a_i\leqslant j\leqslant b_i, 1\leqslant i\leqslant k).$$

すなわち，$\sigma: S\to S$ は明記性を満たす．

$\sigma_{|S}$ が擬軌道追跡性をもたないことを示すために，定理11·7より $\sigma_{|S}$ が有限型でないことを示せばよい．いま，$\sigma_{|S}$ は次数 N の有限型であると仮定しよう．このとき部分集合 $B\subset Y_2{}^N=\times_0^N\{0,1\}$ が存在して，S の定義により，B は次の

ブロックを含む.

$$(\underbrace{0, \cdots, 0}_{N+1}), \quad (\underbrace{1, \cdots, 1}_{N+1})$$

$$(\underbrace{1, \cdots, 1}_{j}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{N-j+1}), \quad (\underbrace{0, \cdots, 0}_{j}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{N-j+1}) \qquad (1 \leqslant j \leqslant N).$$

k は $k \geqslant N$ なる偶数とし

$$y(j) = \begin{cases} 1 & (1 \leqslant j \leqslant k) \\ 0 & (j \leqslant 0 \text{ または } j > k) \end{cases}$$

とする．このとき，$y = (y(j)) \notin S$ である．しかし

$$(y(j), \cdots, y(j+N+1)) \in B \quad (j \in \boldsymbol{Z})$$

より $y \in S$ となって矛盾が起こる.

第6章　位相的エントロピー

ここでは，後述の測度論的エントロピーのアナロジーとして Adler, Konheim, McAndrew 等が定義した位相的エントロピーと Bowen によるその拡張について考察する．

§17 は Adler, Konheim, McAndrew によるものであって，コンパクト空間からそれ自身への連続写像の位相的エントロピーを開被覆を使って定義し，その基本的性質を調べる．そして，コンパクト距離空間の上の拡大的な同相写像に対して，その位相的エントロピーは周期点の個数の増加率によって下から評価できることを示す．そして，m 次元トーラスの上の拡大的な自己同型写像の位相的エントロピーを計算する．

§18 では，一般の距離空間の上の一様連続な写像の位相的エントロピーを Bowen の方法で定義し，コンパクトの場合は上のものと一致することを示す．そして，位相的エントロピーの直積定理およびリフトによる不変性を示す．§19 では，コンパクト距離空間の上の明記性をもつ同相写像は正の位相的エントロピーをもつことを示し，さらに拡大性を満たすときは位相的エントロピーが周期点の増大率と一致するという Bowen の定理を証明する．

§17　開被覆とエントロピー

与えられた同相写像の軌道の濃度をある方法によって数値で表したものが位相的エントロピーである．

この節では理解しやすい開被覆による位相的エントロピーの定義を与える．

空間 (X,θ) はコンパクト Hausdorff 空間とする．必ずしも距離空間でなくてもよい．α, β は X の開被覆としよう．

f は X から X への連続写像で，α は X の開被覆であるとき

$$f^{-1}(\alpha)=\{f^{-1}(A) : A\in\alpha\}$$

もまた X の開被覆であって

$$f^{-1}(\alpha\vee\beta)=f^{-1}(\alpha)\vee f^{-1}(\beta)$$

$$\alpha\leqslant\beta \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(\alpha)\leqslant f^{-1}(\beta)$$

が成り立つ．

X の開被覆 α に対し，$N(\alpha)$ は X を被覆するのに必要な α の有限部分被覆

の最小濃度を表し

$$H(\alpha)=\log N(\alpha)$$

によって **α のエントロピー**を定義する．ここに対数の底は2とする．

注意 17･1　次が成り立つ．

（1）　$H(\alpha)\geqslant 0.$

（2）　$H(\alpha)=0 \iff N(\alpha)=1 \iff X\in\alpha.$

（3）　$\alpha\leqslant\beta \Rightarrow H(\alpha)\leqslant H(\beta).$

証明　$\{B_1, \cdots, B_{N(\beta)}\}$ は X を被覆するのに必要な最小個数をもつ β の部分被覆とする．$\alpha\leqslant\beta$ であるから，任意の B_i に対し $B_i\subset A_i$ なる $A_i\in\alpha$ が存在する．よって $\{A_1, \cdots, A_{N(\alpha)}\}$ は X の被覆である．だから $N(\alpha)\leqslant N(\beta)$ が成り立つ．

（4）　$H(\alpha\vee\beta)\leqslant H(\alpha)+H(\beta)$

証明　$\{A_1, \cdots, A_{N(\alpha)}\}$ は X を被覆するのに必要な最小個数をもつ α の部分被覆で，$\{B_1, \cdots, B_{N(\beta)}\}$ も同じように選ばれた β の部分被覆とする．このとき

$$\{A_i\cap B_j : 1\leqslant i\leqslant N(\alpha), 1\leqslant j\leqslant N(\beta)\}$$

は $\alpha\vee\beta$ の部分被覆で，$N(\alpha\vee\beta)\leqslant N(\alpha)N(\beta)$ である．

（5）　f が連続写像であれば，$H(f^{-1}(\alpha))\leqslant H(\alpha)$ が成り立ち，f が同相写像であれば，$H(f^{-1}(\alpha))=H(\alpha)$ が成り立つ．

証明　$\{A_1, \cdots, A_{N(\alpha)}\}$ は X の最小個数をもつ α の部分被覆とすると

$$\{f^{-1}(A_1), \cdots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$$

は $f^{-1}(\alpha)$ の部分被覆で，$N(f^{-1}(\alpha))\leqslant N(\alpha)$ である．$\{f^{-1}(A_i) : 1\leqslant i\leqslant N(f^{-1}(\alpha))\}$ を $f^{-1}(\alpha)$ の最小個数の部分被覆とすると，f が同相写像のときは，$\{A_1, \cdots, A_{N(f^{-1}(\alpha))}\}$ は X の被覆である．よって $N(\alpha)\leqslant N(f^{-1}(\alpha))$ が成り立つ．

定理 17･1　正の実数列 $\{a_n : n\geqslant 1\}$ はすべての n, m に対し

$$a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$$

を満たしているとする．このとき数列 $\{a_n/n\}$ の極限が存在し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf\left\{\frac{a_n}{n}:n\geqslant 1\right\}$$

が成り立つ.

証明　任意の $m>0$ を固定する. 任意の $j>0$ に対し, j は $j=km+n\,(0\leqslant n<m)$ と表すことができるから

$$\frac{a_j}{j}=\frac{a_{n+km}}{n+km}\leqslant\frac{a_n}{km}+\frac{a_{km}}{km}\leqslant\frac{a_n}{km}+\frac{a_m}{m}.$$

$j\to\infty$ とするとき, $k\to\infty$ であるから, $\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{a_j}{j}\leqslant\frac{a_m}{m}$ が成り立つ. m は任意であるから

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{a_j}{j}\leqslant\inf_m\frac{a_m}{m}.$$

しかし $\inf\frac{a_m}{m}\leqslant\underline{\lim_{j\to\infty}}\frac{a_j}{j}$ から, $\lim_{j\to\infty}\frac{a_j}{j}$ が存在して, $\inf_j\frac{a_j}{j}$ に等しい.

定理 17・2　α は X の開被覆で, f は X から X への連続写像とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha))$$

が存在する.

証明　任意の $n>0$ に対し

$$a_n=H(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha))$$

とおくと $a_n\geqslant 0$, $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$ であるから, 定理 17・1 より結論が得られる.

α は X の開被覆で, f は X から X への連続写像とする. このとき

$$h(f,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots< f^{-(n-1)}(\alpha))$$

によって, **α に関する f のエントロピー** を定義する.

注意 17・2　次が成り立つ.

(1)　$h(f,\alpha)\geqslant 0$.

(2)　$\alpha\leqslant\beta\ \Rightarrow\ h(f,\alpha)\leqslant h(f,\beta)$.

証明　$\alpha\leqslant\beta$ ならば, 任意の $n>0$ に対し, $\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\leqslant\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\beta)$ が成り立つ.

よって

$$H(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)) \leqslant H(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\beta)).$$

定理 17·1 より，$h(f,\alpha)\leqslant h(f,\beta)$ である．

（3）　$h(f,\alpha)\leqslant H(\alpha)$.

証明　注意 17·1（4），（5）から

$$H(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha))\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}H(f^{-i}(\alpha))\leqslant nH(\alpha).$$

連続写像 f に対する1つの量

$$h(f)=\sup\{h(f,\alpha):\alpha \text{ は } X \text{ の開被覆}\}$$

を f の**位相的エントロピー**という．

注意 17·3　$h(f)$ の定義から次は明らかである．

（1）　$h(f)\geqslant 0$.

（2）　$h(id)=0$.

定理 17·3　f が同相写像であれば，$h(f)=h(f^{-1})$ である．

証明　注意 17·1（5）を利用すると，任意の開被覆 α に対し

$$\begin{aligned} h(f,\alpha) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha)) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(f^{-(n-1)}\{\alpha\vee f(\alpha)\cdots\vee f^{n-1}(\alpha)\}) \\ &= h(f^{-1},\alpha). \end{aligned}$$

定理 17·4　X_1, X_2 はコンパクト Hausdorff 空間，$i=1,2$ に対し，f_i は X_i から X_i への連続写像，$\varphi: X_1\to X_2$ は同相写像で，$\varphi\circ f_1=f_2\circ\varphi$ を満たすとする．このとき

$$h(f_1)=h(f_2)$$

である．

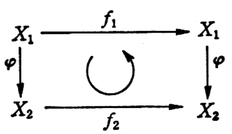


図 6·1

証明　α を X_1 の開被覆とする．注意 17·1（5）

より

$$h(f_1,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha\vee f_1^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f_1^{-(n-1)}(\alpha))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\varphi^{-1}\{\varphi(\alpha)\vee f_2^{-1}\varphi(\alpha)\vee\cdots\vee f_2^{-(n-1)}\varphi(\alpha)\})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\varphi(\alpha)\vee f_2^{-1}\varphi(\alpha)\vee\cdots\vee f_2^{-(n-1)}\varphi(\alpha))$$

$$=h(f_2,\varphi(\alpha)).$$

θ_1 を X_1 の開被覆の全体とすれば，$\varphi(\theta_1)$ は X_2 の開被覆の全体である．よって定理が得られる．

上の定理から，位相的エントロピーは位相的不変量であることがわかる．

定理 17·5 コンパクト距離空間 X から X の上への同相写像 f に対し，α は f の生成系とする．このとき

$$h(f)=h(f,\alpha)$$

が成り立つ．

証明 β は任意の開被覆とする．$\delta>0$ は β に対する Lebesgue 数とし，$\bigvee_{-N}^{N}f^{-n}(\alpha)$ の元の直径が δ 以下となるように $N>0$ を選ぶ（定理 7·2 を参照）．このとき

$$\beta\leqslant\bigvee_{-N}^{N}f^{-n}(\alpha)$$

が成り立ち，さらに

$$h(f,\beta)\leqslant h(f,\bigvee_{-N}^{N}f^{-n}(\alpha))=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\bigvee_{-N}^{N}f^{-n}(\alpha)))$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H(\bigvee_{-N}^{N+k-1}f^{-i}(\alpha))=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H(\bigvee_{0}^{2N+k-1}f^{-n}(\alpha))$$

$$=\lim_{k\leftarrow\infty}\frac{2N+k}{k}\frac{1}{2N+k}H(\bigvee_{0}^{2N+k-1}f^{-n}(\alpha))$$

$$=h(f,\alpha).$$

だから $h(f)=h(f,\alpha)$ である．

注意 17·4　定理17·5は弱生成系に対しても成り立つ.

注意 17·5　Y_k^Z の上の推移写像 σ の位相的エントロピーは $h(\sigma)=\log k$ である.

証明　注意7·4（4）の証明の中の α は生成系である. 各 $A_i \in \alpha$ は互いに共通部分をもたないから, $N(\alpha)=k$ である. 任意の $n>0$ に対し

$$N(\bigvee_{i=0}^{n-1} \alpha^{-i}(\alpha))=k^n$$

から, $h(\sigma)=\log k$ が求まる.

f はコンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像とする. f の周期点は生成系と次のような関係にある.

定理 17·6　$f: X \to X$ は拡大的で, α は f の生成系とする. このとき X の点 x が k 周期点（$f^k(x)=x$）であるための必要十分条件は, $A_j \in \alpha\ (0 \leqslant j \leqslant k-1)$ が存在して

$$\{x\}=\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^{ki}(A_0 \cap f(A_1) \cap \cdots \cap f^{k-1}(A_{k-1}))$$

が成り立つことである.

証明　$f^k(x)=x$ とする. $\bigvee_0^{k-1} f^i(\alpha)$ は X の被覆であるから, 点 x を含む $\bigvee_0^{k-1} f^i(\alpha)$ の元 $\bigcap_0^{k-1} f^i(A_i)$ が存在する. ゆえに

$$x \in f^{ki}(A_0 \cap f(A_1) \cap \cdots \cap f^{k-1}(A_{k-1}))$$

がすべての $i \in \boldsymbol{Z}$ について成り立つ. だから

$$x \in \bigcap_{-\infty}^{\infty} f^{ki}(A_0 \cap f(A_1) \cap \cdots \cap f^{k-1}(A_{k-1})).$$

さらに $\bigvee_0^{k-1} f^i(\alpha)$ は生成系である. よって

$$\{x\}=\bigcap_{-\infty}^{\infty} f^{ki}(A_0 \cap f(A_1) \cap \cdots \cap f^{k-1}(A_{k-1})).$$

逆は明らかである.

定理 17·7　同相写像 $f: X \to X$ は拡大的で, α は濃度 M をもつ生成系とす

る．このとき任意の $n>0$ に対し

$$N_n(f)=\#\{x\in X : f^n(x)=x\}\leqslant M^n$$

が成り立つ．ここに $\#E$ は E の濃度を表す．

証明は定理 17·6 より明らかである．

定理 17·8 コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が拡大的であれば

$$h(f)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log N_n(f)$$

である．

証明 α は f の生成系とする．$\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)$ の任意の元は高々 1 個の n 周期点を含んでいる（定理 17·6 による）．よって

$$N_n(f)\leqslant N(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha)).$$

ゆえに

$$\frac{1}{n}\log N_n(f)\leqslant\frac{1}{n}H(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha))$$

である．この不等式から結論が求まる．

定理 17·9 m 次元トーラス T^m の上の自己同型写像 f に対応する行列を $[f]$ で表し，$[f]$ の固有値を $\lambda_i\,(1\leqslant i\leqslant m)$ で表すことにする．このとき f が拡大的であれば

$$N_n(f)=\left|\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i{}^n-1)\right|,$$

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n(f)=\sum_{|\lambda_i|>1}\log|\lambda_i|$$

が成り立つ．

証明 id は T^m の上の恒等写像，E は $\boldsymbol{R}^m$ の上の $m\times m$ の単位行列とする．任意の $n>0$ に対し

$$\begin{aligned}N_n(f)&=\#\{x\in X : f^n(x)=x\}=\#\mathrm{kernel}\ (f^n-id)\\&=|\det([f]^n-E)| \qquad \text{(次の定理 17·10 によって)}\\&=|\textstyle\prod_i(\lambda_i{}^n-1)|.\end{aligned}$$

$f: T^m \to T^m$ に対応する行列 $[f]$ の定義する線形写像 $\bar{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ は f のリフトである．f は拡大的であるから，定理 13・2 により $\bar{f}$ は拡大的である．よって，定理 14・2 により，$\bar{f}$ は擬軌道追跡性をもち，かつ $[f]$ のすべての固有値 λ_i は $|\lambda_i| \neq 1$ である．ところで，$|\lambda_i|<1$ のとき $|\lambda_i{}^n-1|<2$ であるから

$$\frac{1}{n}\log|\lambda_i{}^n-1| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

$|\lambda_i|>1$ のとき

$$\frac{1}{n}\log|\lambda_i{}^n-1| = \frac{1}{n}\left\{\log|\lambda_i|^n+\log|1-\lambda_i{}^{-n}|\right\}$$

$$\to \log|\lambda_i| \qquad (n\to\infty)$$

である．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n(f) = \sum_{|\lambda_i|>1}\log|\lambda_i|$$

が得られる．

$\bar{f}$ は擬軌道追跡性をもつから，定理 13・1 によって $f: T^m \to T^m$ は擬軌道追跡性をもつ．§24 の注意 24・4 (2) によって，$\Omega(f)=T^m$ である．定理 15・3 と T^m の連結性から，$f: T^m \to T^m$ は位相推移的である．f は自己同型写像であるから T^m の単位元 0 は不動点 ($f(0)=0$) である．よって定理 15・5 により，$f: T^m \to T^m$ は位相混合的である．定理 16・3 によって，f は明記性をもつことがわかる．ゆえに §19 の定理 19・3 によって

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N_n(f)$$

である．

定理 17・10 f は n 次元トーラス T^n から T^n の上への準同型写像とし，$[f]$ は f に対応する行列とする．このとき f は $|\det([f])|$ 対 1 の写像である．ここに**準同型写像**とは，$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ($x, y\in T^n$) を満たす連続写像をいう．

証明 f は上への準同型写像であるから，$\det([f]) \neq 0$ である．行列 $[f]$ は基本行列 E_i の積

$$[f]=E_1E_2\cdots E_r$$

で表される．各 E_i は単位行列 E を次の形の1つに変形したものである．

（i） 行列 E の第 i 行と第 j 行とを入れ換える $(i \neq j)$.

$$E=\begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i' \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j' \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j' \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i' \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \end{matrix}$$

（ii） 有理数 $c \neq 0$ のとき，E の第 i 行 $\boldsymbol{a}_i'$ を $c\boldsymbol{a}_i'$ で置き換える．

$$E=\begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i' \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ c\boldsymbol{a}_i' \\ \vdots \end{pmatrix}$$

（iii） 有理数 c のとき，E の 第 j 行 $\boldsymbol{a}_j'$ を $\boldsymbol{a}_j'+c\boldsymbol{a}_i'$ で置き換える $(i \neq j)$.

$$E=\begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i' \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j' \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i' \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j'+c\boldsymbol{a}_i' \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \end{matrix}$$

$[f]$ の成分は整数であるから，各 E_i の成分は有理数である．ゆえに，E_i に対し e_iE_i の各成分が整数となるように $e_i \in \boldsymbol{Z}$ を選ぶことができる．

（i）の場合　e_iE_i は T^n の上で $|e_i|^n$ 対1の写像，すなわち $|e_i|^n|\det(E_i)|$ 対1の写像を生成する．

（ii）の場合　e_iE_i は T^n の上で $|e_i|^n|c|$ 対1の 写 像，す な わ ち $|e_i|^n|\det|(E_i)|$ 対1の写像を生成する．

（iii）の場合　e_iE_i は $|e_i|^n|\det|(E_i)|$ 対1の写像を生成する．

いま，f_i は e_iE_i によって T^n の上に生成された写像とし，g は $e_1\cdots e_r[f]$ によって生成された T^n の上の写像とすれば

$$g=f_1\cdots f_r$$

である．g は b' 対1，f は b 対1とすれば

$$b'=\prod_{i=1}^{r}|e_i|^n|\det(E_i)|=\prod_{i=1}^{r}|e_i|^n\prod_{i=1}^{r}|\det(E_i)|=\prod_{i=1}^{r}|e_i|^n|\det([f])|$$

である．一方，$[g]=e_1\cdots e_r[f]$ であるから

$$b'=\prod_{i=1}^{r}|e_i|^n b.$$

ゆえに $b=|\det([f])|$ を得る．

§ 18 軌道の増大率とエントロピー

軌道の様子から位相的エントロピーの意味を考えてみよう．

相空間 X の上の状態 x の時間発展を連続写像 f の軌道 $\{x, f(x), f^2(x), \cdots\}$ でとらえる立場に立つとき，2つの状態 x, y が非常に近く $(d(x, y)<\varepsilon)$ にあって，互いに異なる軌道を与えるかどうかわからなくとも，2つの軌道 $\{x, f(x), \cdots\}$ と $\{y, f(y), \cdots\}$ がある $k>0$ に対し $d(f^k(x), f^k(y))>\varepsilon$ であれば，2つの軌道は k の時間で区別可能である．いま，X はコンパクトであるとしよう．X の部分集合 E に属する2つの状態 x, y が $[0, k)\ni n$ なる自然数 n に対し，$d(f^n(x), f^n(y))>\varepsilon$ であれば，E の濃度 $\sharp E$ は有限軌道の個数を示している．このような $\sharp E$ の最大濃度を $s_k(\varepsilon)$ で表し，k を増大させれば，それにつれて $s_k(\varepsilon)$ も増大し1つの増大率として，$h(f, \varepsilon)=\overline{\lim}_{k\to\infty}(1/k)\log s_k(\varepsilon)$ が定義される．例えば，$s_k(\varepsilon)=2^{hk}$ であれば，$h(f, \varepsilon)=h$ である．ここで $\varepsilon\to 0$ とすれば，$h_d(f)=\lim h(f, \varepsilon)$ が与えられる．よって，$h_d(f)$ を f の軌道の増大率によるエントロピーということにする．このエントロピーはコンパクト距離空間の上では開被覆によるエントロピーと一致することが後で証明される．

上の説明をきちんと定義しよう．これから扱う空間 X は距離空間でなくてはならない．しかし，コンパクト性は仮定しなくてもよい．

(X, d) は距離空間とし，$UM(X)$ は X から X への一様連続写像の全体を表すことにする（写像は全射とは限らないことに注意する）．

f は $UM(X)$ の元で，n は自然数，$\varepsilon>0$ とする．

K は X の部分集合とする．部分集合 $F(\subset X)$ が f による K の (n, ε)-**集約集合**であるとは，任意の $x\in K$ に対し次を満たす $y\in F$ が存在することである．

$$\max\{d(f^i(x), f^i(y)) : 0\leqq i\leqq n-1\}\leqq\varepsilon$$

f による K の任意の (n, ε)-集約集合の最小の濃度を

$$r_n(\varepsilon, K)$$

で表す．

注意 18·1 K がコンパクトであるとき，$r_n(\varepsilon, K)$ は有限である．

証明 f は一様連続であるから，実数 $\delta>0$ が存在して

$$d(x, y)<\delta \quad \Rightarrow \quad \max\{d(f^i(x), f^i(y)) : 0\leqslant i\leqslant n-1\}<\varepsilon$$

とできる．このとき，$r_n(\varepsilon, K)$ は K を被覆するために必要な δ-開球の個数よりも大きくないことがわかる．ゆえに $r_n(\varepsilon, K)<\infty$ である．

いま，数列 $\{r_n(\varepsilon, K) : n\geqslant 1\}$ に対して

$$\bar{r}_f(\varepsilon, K)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon, K)$$

を定義する（対数の底は 2 である）．

X の部分集合 E が f による (n, ε)-**分離集合**であるとは，E の異なる 2 つの点 x, y に対し

$$\max\{d(f^i(x), f^i(y)) : 0\leqslant i\leqslant n-1\}>\varepsilon$$

が成り立つときをいう．コンパクト部分集合 K の中で f による任意の (n, ε)-分離集合の最大濃度を $s_n(\varepsilon, K)$ で表す．このとき，$s_n(\varepsilon, K)$ は有限である（このことは次の定理 18･1 で証明される）．そこで

$$\bar{s}_f(\varepsilon, K)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\varepsilon, K)$$

を定義する．次の定理によって，2 つの実数列 $\{\bar{r}_f(\varepsilon, K) : \varepsilon>0\}$, $\{\bar{s}_f(\varepsilon, K) : \varepsilon>0\}$ の極限が存在して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{r}_f(\varepsilon, K)=\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{s}_f(\varepsilon, K)$$

が成り立つ．上の等式を $h(f, K)$ で表し，X のすべてのコンパクト集合の族を Λ とするとき

$$h_d(f)=\sup\{h(f, K) : K\in\Lambda\}$$

とおく．$h_d(f)$ を距離空間 (X, d) の**一様連続写像のエントロピー**という．

定理 18･1 K は X のコンパクト部分集合とする．このとき次が成り立つ．

(i) $r_n(\varepsilon, K)\leqslant s_n(\varepsilon, K)\leqslant r_n(\varepsilon/2, K)<\infty$

(ii) $\varepsilon_1<\varepsilon_2 \Rightarrow \bar{r}_f(\varepsilon_1, K)\geqslant\bar{r}_f(\varepsilon_2, K)$, $\bar{s}_f(\varepsilon_1, K)\geqslant\bar{s}_f(\varepsilon_2, K)$.

証明 最初に (i) の後半の不等式を示そう．E は K の部分集合で，(n, ε)-分離集合とし，F は X の部分集合で K の $(n, \varepsilon/2)$-集約集合とする．$E\subset K$ から，任意の $x\in E$ に対し，$\varphi(x)\in F$ が存在して

$$\max\{d(f^i(x), f^i(\varphi(x))) : 0\leqslant i\leqslant n-1\}\leqslant\varepsilon/2$$

が成り立つ．いま，$y \in E$ そして $\varphi(x)=\varphi(y)$ とすると

$$\begin{aligned}&\max\{d(f^i(x),f^i(y)):0\leqslant i\leqslant n-1\}\\&\leqslant\max\{d(f^i(x),f^i(\varphi(x))):0\leqslant i\leqslant n-1\}\\&+\max\{d(f^i(\varphi(y)),f^i(y)):0\leqslant i\leqslant n-1\}\\&\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

E は (n,ε)-分離集合であるから，$x=y$ である．よって，E の濃度は F の濃度より大きくない．だから，$s_n(\varepsilon,K)\leqslant r_n(\varepsilon/2,K)$ である．

次に（i）の前半の不等式を示そう．K の部分集合 E は (n,ε)-分離集合で，最大の濃度をもつとする．このとき，E は K の (n,ε)-集約集合である．もしこのことが正しいとすれば，前半の不等式が得られる．いま，E は K の (n,ε)-集約集合でないと仮定する．このとき，任意の $y\in E$ に対し

$$\max\{d(f^i(x),f^i(y)):0\leqslant i\leqslant n-1\}>\varepsilon$$

を満たす $x\in K$ が存在するから，$E\cup\{x\}$ は K の部分集合で (n,ε)-分離集合である．これは E の選び方に矛盾する．

（ii）は定義と（i）により明らかである．

注意 18·2

（1） $h_d(f)$ は距離関数 d に依存する．

（2） $K_i, 0\leqslant i\leqslant m$, はコンパクト部分集合とする．もし $K_0\subset K_1\cup\cdots\cup K_m$ であれば

$$h(f,K_0)\leqslant\max\{h(f,K_i):1\leqslant i\leqslant m\}.$$

証明 任意の $\varepsilon>0$ に対し，明らかに

$$s_n(\varepsilon,K_0)\leqslant s_n(\varepsilon,K_1)+\cdots+s_n(\varepsilon,K_m).$$

$\varepsilon>0$ を固定する．このとき任意の $n>0$ に対し

$$s_n(\varepsilon,K_{i_n}(\varepsilon))=\max\{s_n(\varepsilon,K_j):1\leqslant j\leqslant m\}$$

となる $K_{i_n}(\varepsilon)\in\{K_i:1\leqslant i\leqslant m\}$ が存在する．ゆえに

$$s_n(\varepsilon,K_0)\leqslant ms_n(\varepsilon,K_{i_n}(\varepsilon))$$

が成り立つ．だから

$$\log s_n(\varepsilon,K_0)\leqslant\log m+\log s_n(\varepsilon,K_{i_n}(\varepsilon)).$$

さて

$$\frac{1}{n_j}\log s_{n_j}(\varepsilon, K_0) \to \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log s_n(\varepsilon, K_0) \quad (j\to\infty)$$

を満たす自然数列 $\{n_j\}$ を選ぶ．このとき，$\{K_{in_j}(\varepsilon): j\geqslant 0\}$ は有限集合族 $\{K_i: 1\leqslant i\leqslant m\}$ の部分族であるから，$\{K_{in_j}(\varepsilon)\}$ の部分族はいずれかの $K(\varepsilon)$ に等しい．簡単のために，$K_{in_j}(\varepsilon)=K(\varepsilon)$ $(j\geqslant 0)$ とすれば

$$\bar{s}_f(\varepsilon, K_0)\leqslant \bar{s}_f(\varepsilon, K(\varepsilon))$$

が得られる．ε は任意であるから，$K(\varepsilon_\alpha)$ は一定の集合 K_{i_0} であるように $\varepsilon_\alpha\to 0$ を選ぶことができる．だから

$$h(f, K_0)\leqslant h(f, K_{i_0})\leqslant \max\{h(f, K_j): 1\leqslant j\leqslant m\}.$$

（3） 任意の $\delta>0$ に対して f のエントロピー $h_d(f)$ は次を満たす．

$$h_d(f)=\sup\{h(f, K): \mathrm{diam}(K)\leqslant\delta,\ K\in\Lambda\}.$$

証明 $G\in\Lambda$ とする．α は G の任意の有限開被覆であって，各 $U\in\alpha$ の直径は δ 以下 $(\mathrm{diam}(U)\leqslant\delta)$ とする．明らかに $G\subset\bigcup_{U\in\alpha}\overline{U}$ であるから，（2）によって $h(f, G)\leqslant\max\{h(f,\overline{U}): U\in\alpha\}$ が成り立つ．このことから（3）が求まる．

（4） X がコンパクトであれば，$h_d(f)=h(f, X)$ である．

証明 （2）によって，任意のコンパクト部分集合 $K\subset X$ に対し，$h(f, K)\leqslant h(f, X)$ である．よって $h_d(f)=h(f, X)$.

定理 18·2 距離関数 d と d' は一様同値で，$f\in UM(X)$ とする．このとき

$$h_d(f)=h_{d'}(f)$$

が成り立つ．

証明 任意の $\varepsilon_1>0$ に対し

$$d'(x, y)<\varepsilon_2 \quad\Rightarrow\quad d(x, y)<\varepsilon_1$$

を満たす $\varepsilon_2>0$ が存在し，この ε_2 に対して

$$d(x, y)<\varepsilon_3 \quad\Rightarrow\quad d'(x, y)<\varepsilon_2$$

を満たす $\varepsilon_3>0$ が存在する．よって，コンパクト部分集合 K に対し

$$r_n(\varepsilon_1, K, d)\leqslant r_n(\varepsilon_2, K, d'),\quad r_n(\varepsilon_2, K, d')\leqslant r_n(\varepsilon_3, K, d)$$

が成り立つ．だから

$$\bar{r}_f(\varepsilon_1, K, d)\leqslant\bar{r}_f(\varepsilon_2, K, d')\leqslant\bar{r}_f(\varepsilon_3, K, d).$$

$\varepsilon_1\to 0$ とすれば，$\varepsilon_2\to 0$，$\varepsilon_3\to 0$ である．ゆえに $h_d(f,K)=h_{d'}(f,K)$.

定理 18・3　f はコンパクト距離空間 (X,d) の連続写像とする．このとき，開被覆によるエントロピーと軌道の増大率によるエントロピーは一致する．

証明　開被覆によって定義されたエントロピーを $h^*(f,\alpha)$, $h^*(f)$ で表すことにしよう．X の有限開被覆 $\alpha=\{A_1,\cdots,A_p\}$ に対し，最初に次を証明する．

(a)　　$h^*(f,\alpha)\leqslant h_d(f)$.

$\delta(\alpha)>0$ は α に対する Lebesgue 数とする．$0<\delta<\delta(\alpha)$ なる任意の δ に対し，F を X の部分集合で最小濃度ををもつ $(n,\delta/2)$-集約集合とする．任意の $z\in F$ に対し

$$B_{\delta/2}(f^k(z))\subset A_{i_k}\quad(0\leqslant k\leqslant n-1)$$

なる $A_{i_k}\in\alpha$ が存在する．ここに $B_\delta(x)$ は δ-閉球を表す．A_{i_k} は点 $f^k(z)$ を含むから，A_{i_k} を $A_{i_k}(z)$ で表すことにする．このとき

$$c(z)=A_{i_0}(z)\cap f^{-1}(A_{i_1}(z))\cap\cdots\cap f^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}}(z))$$

は $\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)$ に属し，$X=\cup\{c(z):z\in F\}$ である．実際に，任意の $x\in X$ に対し，$z\in F$ が存在して

$$x\in f^{-k}(B_{\delta/2}(f^kx))\subset f^{-k}(A_{i_k}(z))\quad(0\leqslant k\leqslant n-1).$$

すなわち $x\in c(z)$ である．したがって

$$N(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha))\leqslant \sharp F=r_n(\delta/2,X)$$

($\sharp F$ は F の濃度を示している)．よって $h^*(f,\alpha)\leqslant\bar{r}_f(\delta/2,X)$ である．δ は任意であるから $\delta\to 0$ とすれば，$h^*(f,\alpha)\leqslant h_d(f,X)=h_d(f)$ が求まる．

次に

(b)　　$h_d(f)\leqslant h^*(f)$

を示そう．任意の $\delta>0$ に対し，$\alpha=\{A_1,\cdots,A_p\}$ は各 A_i が $\mathrm{diam}(A_i)<\delta$ を満たす X の開被覆とし，E を最大濃度の X の (n,δ)-分離集合とする．このとき，任意の $x,y\in E$ $(x\neq y)$ に対し，$A\in\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)$ が存在して

$$x\in A\quad\Rightarrow\quad y\notin A$$

である．実際に，$x,y\in A$ とすると，A は $\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)$ に属しているから

$$A=\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_{j_i}) \quad (A_{j_i}\in\alpha)$$

と書ける．よって

$$\max\{d(f^i(x), f^i(y)) : 0\leqslant i\leqslant n-1\}<\delta.$$

しかし，E は(n,δ)-分離集合であるから，$x=y$ を得る．ゆえに

$$N(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\alpha))\geqslant \# E=s_n(\delta, X).$$

だから

$$h^*(f)\geqslant h^*(f,\alpha)\geqslant \bar{s}_f(\delta, X).$$

δ は任意であるから $\delta\to 0$ とすれば，$h^*(f)\geqslant h_d(f,X)=h_d(f)$ が求まる．

定理 18・4

（1） $f\in UM(X), m>0 \Rightarrow h_d(f^m)=mh_d(f)$.

（2） $f_i\in UM(X_i, d_i)$ $(i=1,2)$，直積位相空間 $X_1\times X_2$ の距離関数 d を

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$

写像 $f_1\times f_2$ を

$$f_1\times f_2(x_1,x_2)=(f_1(x_1), f_2(x_2))$$

によってそれぞれ定義する．このとき

$$h_d(f_1\times f_2)\leqslant h_{d_1}(f_1)+h_{d_2}(f_2)$$

が成り立つ．

（3） 特に X_1, X_2 はコンパクトであるとすると

$$h_d(f_1\times f_2)=h_{d_1}(f_1)+h_{d_2}(f_2)$$

である．

証明 （1）の証明；$r_n(\varepsilon,K,f^m)\leqslant r_{mn}(\varepsilon,K,f)$ であるから

$$\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,K,f^m)\leqslant\frac{m}{mn}\log r_{mn}(\varepsilon,K,f).$$

よって，$h_d(f^m)\leqslant mh_d(f)$. f は一様連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して

$$d(x,y)<\delta \Rightarrow \max\{d(f^i(x), f^i(y)) : 0\leqslant i\leqslant n-1\}<\varepsilon$$

である．ゆえに，f^m による K の (n,δ)-集約集合は f による K の (mn,ε)-集約集合である．だから

$$r_n(\delta, K, f^m) \geqslant r_{nm}(\varepsilon, K, f).$$

ゆえに

$$m\bar{r}_f(\varepsilon, K) \leqslant \bar{r}_{f^m}(\delta, K).$$

$\varepsilon \to 0$ としたとき，$mh_d(f, K) \leqslant h_d(f^m, K)$ が求まる．

（2）の証明；$K_i \subset X_i$ はコンパクト部分集合とし，F_i は f_i による K_i の (n, ε)-集約集合とする．このとき，直積集合 $F_1 \times F_2$ は $f_1 \times f_2$ による $K_1 \times K_2$ の (n, ε)-集約集合である．よって

$$r_n(\varepsilon, K_1 \times K_2, f_1 \times f_2) \leqslant r_n(\varepsilon, K_1, f_1) r_n(\varepsilon, K_2, f_2).$$

したがって

$$\bar{r}_{f_1 \times f_2}(\varepsilon, K_1 \times K_2) \leqslant \bar{r}_{f_1}(\varepsilon, K_1) + \bar{r}_{f_2}(\varepsilon, K_2)$$

が求まり，$\varepsilon \to 0$ とするとき

$$h_d(f_1 \times f_2, K_1 \times K_2) \leqslant h_{d_1}(f_1, K_1) + h_{d_2}(f_2, K_2).$$

$(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ に対し，$\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ $(i=1, 2)$ なる連続写像 $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ を定義する．K が $X_1 \times X_2$ のコンパクト部分集合であれば，$\pi_1(K) = K_1$, $\pi_2(K) = K_2$ はコンパクトであって，$K \subset K_1 \times K_2$ を満たす．よって

$$h_d(f_1 \times f_2, K) \leqslant h_d(f_1 \times f_2, K_1 \times K_2)$$

であり

$$\begin{aligned} h_d(f_1 \times f_2) &= \sup_{K \subset K_1 \times K_2 : \text{コンパクト}} h_d(f_1 \times f_2, K) \\ &\leqslant \sup_{\substack{K_1 \subset X_1 \\ K_2 \subset X_2}: \text{コンパクト}} h_d(f_1 \times f_2, K_1 \times K_2) \\ &\leqslant \sup_{K_1 \subset X_1 : \text{コンパクト}} h_{d_1}(f_1, K_1) + \sup_{K_2 \subset X_2 : \text{コンパクト}} h_{d_2}(f_2, K_2) \\ &= h_{d_1}(f_1) + h_{d_2}(f_2) \end{aligned}$$

を得る．

（3）の証明；α_i は X_i の有限開被覆，$\delta_i > 0$ は α_i に対する Lebesgue 数とし，X_i の部分集合 S_i は f_i による X_i の最大濃度をもつ $(n, \delta_i/2)$-分離集合とする．

$$\delta = \min\{\delta_1/2, \delta_2/2\}$$

とおくと，$S_1 \times S_2$ は $f_1 \times f_2$ による $X_1 \times X_2$ の (n, δ)-分離集合である．よって

$$s_n(\delta, X_1 \times X_2) \geqslant s_n(\delta_1/2, X_1) s_n(\delta_2/2, X_2).$$

最大濃度をもつ分離集合は，1つの集約集合でもあるから

$$s_n(\delta_1/2, X_1)s_n(\delta_2/2, X_2)\geqslant N(\bigvee_0^{n-1} f^{-i}(\alpha_1))N(\bigvee_0^{n-1} f^{-i}(\alpha_2))$$

が成り立ち

$$h_d(f_1\times f_2)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log s_n(\delta, X_1\times X_2)$$

$$\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(\bigvee_0^{n-1} f^{-i}(\alpha_1))+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(\bigvee_0^{n-i} f^{-i}(\alpha_2))$$

$$=h_{d_1}(f_1, \alpha_1)+h_{d_2}(f_2, \alpha_2).$$

各 α_i は任意であるから

$$h_d(f_1\times f_2)\geqslant h_{d_1}(f_1)+h_{d_2}(f_2)$$

である．

注意 18・3 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が等長的であれば，$h_d(f)=0$ である．

証明 X はコンパクトであるから，有限個の点 $x_1, \cdots, x_k\in X$ が存在して，各点の ε-開球 $U_\varepsilon(x_i)$ の和集合で X は被覆される．f は等長的であるから，任意の $n\geqslant0$ に対し集合 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ は (n, ε)-集約集合である．よって

$$r_n(\varepsilon, X)\leqslant k$$

である．だから $h_d(f)=0$ が求まる．

注意 18・4 1次元トーラス $T^1=\boldsymbol{R}^1/\boldsymbol{Z}^1$ の上のすべての同相写像の位相的エントロピーは0である．

証明 1次元トーラスは1を法とした半開区間 $[0,1)$ と同相であるから，1を法とした $[0,1)$ の上の同相写像 f を扱うことにする．（実際に，$\varphi(x+\boldsymbol{Z}^1)=x$, $x\in[0,1]\,(\mathrm{mod}\ 1)$ によって定義すると $\varphi: T^1\to[0,1)\,(\mathrm{mod}\ 1)$ は同相写像である）

次を満たすように $\varepsilon>0$ を選びなさい．

$$d(x, y)\leqslant\varepsilon \quad\Rightarrow\quad d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))<1/4.$$

f に対する $(1, \varepsilon)$-集約集合を考えるとき

$$r_1(\varepsilon, [0, 1))\leqslant[1/\varepsilon]+1$$

を得る（$[\cdot]$ はガウス記号を表す）

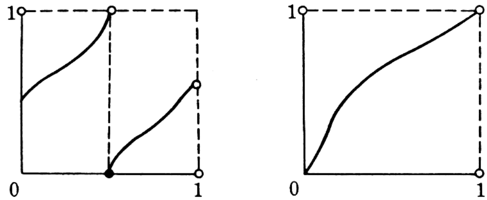


図 6・2

F は最小濃度をもつ $(n\text{-}1, \varepsilon)$-集約集合とし，$f^{n-1}(F)$ の点によって分割される $[0,1)$ の小区間を考える．これらの小区間の長さが ε 以下になるように F に新たに点を付け加える．この場合，高々 $[1/\varepsilon]+1$ 個の点を加えてやれば十分である．いま

$$F' = F \cup f^{-(n-1)}\{\text{新しい点}\}$$

とおくと，F' は $[0,1)\ (\mathrm{mod}\ 1)$ の (n, ε)-集約集合となる．

実際に，任意の $x \in [0,1)$ に対し

$$\max\{d(f^i(x), f^i(y)) : 0 \leqslant i \leqslant n\text{-}2\} \leqslant \varepsilon$$

なる $y \in F$ が存在する．もしも

$$d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) \leqslant \varepsilon$$

であれば，F' は (n, ε)-集約集合である．$d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) > \varepsilon$ の場合を調べよう．

区間 $[f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)]$ は f による ε-区間 $[f^{n-2}(x), f^{n-2}(y)]$ の像である．しかも $[f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)]$ は ε-区間ではない．ここで

$$f^{n-1}(z) \in [f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)],\quad d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z)) \leqslant \varepsilon$$

を満たす $z \in F'$ を選ぶ．このとき $f^{n-2}(z) \in [f^{n-2}(x), f^{n-2}(y)]$．ゆえに

$$d(f^{n-2}(x), f^{n-2}(z)) \leqslant \varepsilon.$$

ε-区間 $[f^{n-2}(x), f^{n-2}(y)]$ は f^{-1} によって長さ 1/4 以内の区間に写される．しかし $y \in F$ であるから，区間 $[f^{n-3}(x), f^{n-3}(y)]$ は長さ ε 以内の区間である．ところで

$$f^{n-3}(z) \in [f^{n-3}(x), f^{n-3}(y)].$$

だから $d(f^{n-3}(x), f^{n-3}(z)) \leqslant \varepsilon$ を得る．このことをくりかえすと

$$d(f^i(x), f^i(z)) \leqslant \varepsilon \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1)$$

が求まる．ゆえに F' は (n,ε)-集約集合である．
したがって

$$r_n(\varepsilon,[0,1))\leqslant r_{n-1}(\varepsilon,[0,1))+[1/\varepsilon]+1\leqslant n([1/\varepsilon]+1).$$

よって

$$\bar{r}_f(\varepsilon,[0,1))=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,[0,1))=0.$$

ゆえに $h_d(f)=0$ が求まる．

注意 18・5 閉区間 [0.1] の上のすべての同相写像の位相的エントロピーは0である．

証明 同相写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ は2点 0,1 に対して $f(0)=0$, $f(1)=1$ あるいは $f(0)=1$, $f(1)=0$ のいずれかの値をとる．だから f^2 は2点 0,1 に対し，$f^2(0)=0$, $f^2(1)=1$ である．よって注意18・4 の証明から，$h_d(f^2)=0$ が求まる．定理 18・4 (1) より，$2h_d(f)=h_d(f^2)=0$. ゆえに $h_d(f)=0$ である．

最後に，次の定理を与えておこう．

定理 18・5 (X,d), $(\tilde{X},\tilde{d})$ は距離空間とし，$\pi:\tilde{X}\to X$ は連続写像とする．特に，π は全射かつ $\delta>0$ が存在して，すべての $\tilde{x}\in\tilde{X}$ に対し

$$\pi_{|U_\delta(\tilde{x})}:U_\delta(\tilde{x})\to U_\delta(\pi(\tilde{x}))$$

は等長的であるとする．すなわち π は局所等長被覆写像とする．このとき，$f\in UM(X)$ と $\tilde{f}\in UM(\tilde{X})$ が $\pi\circ\tilde{f}=f\circ\pi$ を満たすならば，$h_d(f)=h_{\tilde{d}}(\tilde{f})$ である．

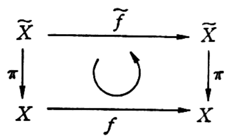


図 6・3

証明 $\tilde{K}$ は diam $(\tilde{K})<\delta$ なる $\tilde{X}$ のコンパクト集合とすれば，仮定によって $\pi(\tilde{K})$ も diam $(\pi(\tilde{K}))<\delta$ なる X のコンパクト集合である．$\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{X}$ は一様連続であるから

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})\leqslant\varepsilon \ \Rightarrow\ \tilde{d}(\tilde{f}(\tilde{x}),\tilde{f}(\tilde{y}))<\delta$$

を満たす $\varepsilon>0$ を選ぶことができる．

$\tilde{K}$ の部分集合 $\tilde{E}$ は $\tilde{f}$ に対する (n,ε)-分離集合とする．このとき，$\pi(\tilde{E})$ は

f に対する (n,ε)-分離集合であることを示そう．明らかに $\pi(\tilde{E})\subset\pi(\tilde{K})$ である．$\pi:\tilde{K}\to\pi(\tilde{K})$ は単射であるから，$\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{E}\ (\tilde{x}\neq\tilde{y})$ ならば，$\pi(\tilde{x})\neq\pi(\tilde{y})$ である．$\tilde{E}$ は $\tilde{f}$ に対する (n,ε)-分離集合であるから，$0\leqslant i_0\leqslant n-1$ なる i_0 が存在して

$$\tilde{d}(\tilde{f}^{i}(\tilde{x}),\tilde{f}^{i}(\tilde{y}))\leqslant\varepsilon\quad(i\leqslant i_0),\qquad \tilde{d}(\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{x}),\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{y}))>\varepsilon$$

とできる．ε の選び方から

$$\tilde{d}(\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{x}),\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{y}))<\delta.$$

よって

$$\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{y})\in U_{\delta}(\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{x})).$$

π は等長的であるから

$$f^{i_0+1}(\pi(\tilde{y}))\in U_{\varepsilon}(f^{i_0+1}\pi(\tilde{x})).$$

一方

$$d(f^{i_0+1}\pi(\tilde{x}),f^{i_0+1}\pi(\tilde{y}))=\tilde{d}(\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{x}),\tilde{f}^{i_0+1}(\tilde{y}))>\varepsilon$$

から，$\pi(\tilde{E})$ は f に対する (n,ε)-分離集合である．したがって

$$s_n(\varepsilon,\tilde{K},\tilde{f})\leqslant s_n(\varepsilon,\pi(\tilde{K}),f)$$

が成り立つ．よって $h_{\tilde{d}}(\tilde{f})\leqslant h_d(f)$ である（注意18・2(3)によって）．

逆の不等式を示すために，E は $\pi(\tilde{K})$ の部分集合で，f に対する (n,ε)-分離集合とする．ここに，$\tilde{K}$ はコンパクトかつ $\operatorname{diam}(\tilde{K})<\delta$ である．

$$\tilde{E}=\pi^{-1}(E)\cap\tilde{K}$$

とすると

$$\tilde{d}(\tilde{f}^{i}(\tilde{x}),\tilde{f}^{i}(\tilde{y}))\leqslant\varepsilon\ (\tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{E})\quad\Rightarrow\quad d(f^{i}\pi(\tilde{x}),f^{i}\pi(\tilde{y}))\leqslant\varepsilon$$

である．だから $\tilde{E}$ は $\tilde{f}$ に対する (n,ε)-分離集合である．よって

$$s_n(\varepsilon,\pi(\tilde{K}),f)\leqslant s_n(\varepsilon,\tilde{K},\tilde{f}).$$

結果として

$$s_n(\varepsilon,\tilde{K},\tilde{f})=s_n(\varepsilon,\pi(\tilde{K}),f)$$

が成り立つ．ゆえに

$$h_{\tilde{d}}(\tilde{f})\geqslant h(\tilde{f},\tilde{K})=h(f,\pi(\tilde{K})).$$

X の任意の $\operatorname{diam}(K)<\delta$ なるコンパクト集合 K は $\tilde{X}$ のあるコンパクト集合 $\tilde{K}$ によって $K=\pi(\tilde{K})$ と表されるから，$h_{\tilde{d}}(\tilde{f})\geqslant h_d(f,K)$ である．K は

diam $(K)<\delta$ なる X の任意のコンパクト集合であるから，注意 18·2 (3) によって $h_{\tilde{d}}(\tilde{f})\geqslant h_d(f)$ である.

§19 周期点とエントロピー

コンパクト距離空間の上の同相写像が拡大性の条件をもっている場合に，周期点とエントロピーとの関連性を §17 の定理 17·8 で述べた．ところで，同相写像が拡大性と明記性をもつとき，位相的エントロピーは周期点の集合と強い関係がある．このことを調べてみよう.

まず次の定理を証明する.

定理 19·1 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f は拡大的であるとする．$c>0$ は拡大定数とする．このとき $0<\delta<c/2$ なる任意の δ に対して

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\delta, X),$$

$$h(f)=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\delta, X)$$

が成り立つ.

証明 X はコンパクトであるから，自然数 k と点列 $x_1, \cdots, x_k\in X$ が存在して

$$X=\bigcup_{i=1}^{k} U_{c/2-\delta}(x_i)$$

とできる．$\alpha=\{U_{c/2}(x_i):1\leqslant i\leqslant k\}$ は X の有限開被覆である．このとき δ は α の Lebesgue 数である．定理 18·3 の証明の (a) の部分から，任意の $n>0$ に対し

$$N(\bigvee_{0}^{n-1} f^{-i}(\alpha))\leqslant r_n(\delta, X)$$

が得られる．この不等式と定理 17·5，定理 7·3 より

$$h(f)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\delta, X)$$

が求まり，定理 18·3 の証明の (b) の部分から

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\delta, X)\leqslant h(f)$$

が求まる．よって，最初の等式が成り立つ.

次に定理 18·1 (i) により

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\delta, X)\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\delta, X)$$
$$\leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\delta, X)\leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\delta/2, X)$$

が成り立つ．$0<\delta<c$ なる任意の δ に対して，上で確かめたように

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\delta, X)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\delta/2, X)$$

が成り立つ．よって上の不等式から

$$h(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(\delta, X)$$

である．

定理 19・2 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が明記性をもてば，f の位相的エントロピーは正である．すなわち $h(f)>0$ である．

証明 $x, y\in X$ $(x\neq y)$ に対し，$\varepsilon>0$ を $d(x, y)>3\varepsilon$ となるように選ぶことにしよう．この ε に対し，$M=M(\varepsilon)>0$ を明記性の定義にあらわれる自然数とする．任意の自然数 n を固定して，$z_i\in\{x, y\}$ なる z_i の n 組 $(z_1, \cdots, z_n)$ を考える．明記性の条件によって

(19・1) $d(f^{iM}(z), z_i)\leqslant\varepsilon \quad (1\leqslant i\leqslant n)$

を満たす $z\in X$ が存在する．異なった n 組に対しては，異なった $z\in X$ が対応する．このような組に対応する $z\in X$ は少なくとも 2^n 個存在する．これらの点 z からなる集合 E_n は (nM, ε)-分離集合である．何故ならば，$z, z'\in E_n$ $(z\neq z')$ に対し

$$d(f^j(z), f^j(z'))\leqslant\varepsilon \quad (0\leqslant j\leqslant nM-1)$$

とすると，点 z に対し n 組 $(z_1, \cdots, z_n)$，点 z' に対し n 組 $(z_1', \cdots, z_n')$ があって (19・1) を満たしている．よって，$z_j\neq z_j'$ なる $1\leqslant j\leqslant n$ が存在して

$$d(f^{jM}(z), z_j)\leqslant\varepsilon,\quad d(f^{jM}(z'), z_j')\leqslant\varepsilon$$

である．ゆえに

$$d(z_j, z_j')\leqslant d(z_j, f^{jM}(z))+d(f^{jM}(z), f^{jM}(z'))$$
$$+d(f^{jM}(z'), z_j')\leqslant 3\varepsilon.$$

しかし，$d(z_j, z_j')=d(x, y)>3\varepsilon$ に矛盾する．

分離集合 E_n を使うと

$$h(f) \geqq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{nM} \log \# E_n = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{nM} \log 2^n = \frac{1}{M} > 0$$

が成り立つ.

定理 19･3 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が拡大性と明記性を満たすならば

$$h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \# P_n(f)$$

が成り立つ. (ここに $P_n(f)$ は f の n 周期点の集合を表す)

証明に対し次の5つの補題を必要とする.

実数 $c>0$ は f の拡大定数, n は十分大であるとする. $s_n(\varepsilon, X)$ はXの (n, ε)-分離集合の最大濃度を表す.

補題 19･1 $0<\varepsilon<c/2$ なる ε と $0<\delta<\varepsilon$ なる任意の δ に対して

$$s_n(\delta, X) \leqq C_{\delta,\varepsilon} s_n(\varepsilon, X)$$

を満たす $C_{\delta,\varepsilon}>0$ が存在する.

証明 f は拡大性をもっているから, 定理 7･2 (1) により

(19･2) $\max\{d(f^j(x), f^j(y)) : |j| \leqq N\} \leqq 2\varepsilon \Rightarrow d(x, y) < \delta$

を満たすように自然数 N を選ぶことができる. f の連続性によって

(19･3) $d(x, y) \leqq \beta \Rightarrow \max\{d(f^j(x), f^j(y)) : |j| \leqq N\} \leqq \delta$

を満たすように $\beta>0$ を選ぶことができる. 直積空間 $X\times X$ の上の距離関数

$$\tilde{d}((x, y), (x', y')) = \max\{d(x, x'), d(y, y')\} \qquad ((x, y), (x', y') \in X\times X)$$

と同相写像

$$f\times f(x, y) = (f(x), f(y))$$

に対する $X\times X$ の $(1, \beta)$-分離集合の最大濃度を $K=K(\beta)$ とする.

X の部分集合 F は最大濃度をもつ (n, ε)-分離集合, 部分集合 E は最大濃度をもつ (n, δ)-分離集合としよう. このとき, $x\in E$ に対し

$$\max\{d(f^j(x), f^j(z(x))) : 0 \leqq j \leqq n-1\} \leqq \varepsilon$$

を満たす $z(x) \in F$ が存在する. もしそうでないとすれば, $F\cup\{x\}$ が (n, ε)-分

離集合となって，F の濃度の最大性に反することになる．

$z\in F$ に対し

$$E_z=\{x\in E: z(x)=z\}$$

とすると，2点 x, y が E_z の点であれば

$$\max\{d(f^i(x), f^i(y)): 0\leqslant i\leqslant n-1\}\leqslant 2\varepsilon$$

である．n は十分大であるから，$N<n$ と考えてよい．j は $N\leqslant j\leqslant n-N$ を満たし，i は $-N\leqslant i\leqslant N$ を満たすとする．このとき $d(f^i\circ f^j(x), f^i\circ f^j(y))\leqslant 2\varepsilon$ であるから，(19・2) により

$$(19\cdot4)\quad \max\{d(f^j(x), f^j(y)): N\leqslant j\leqslant n-N\}<\delta$$

が成り立つ．しかし，集合 $\{x, y\}$ は (n,δ)-分離集合である．だから

$$d(x, y)>\beta \quad あるいは \quad d(f^n(x), f^n(y))>\beta$$

でなくてはならない．何故ならば，$d(x, y)\leqslant\beta$ かつ $d(f^n(x), f^n(y))\leqslant\beta$ とすると (19・3) によって

$$\max\{d(f^j(x), f^j(y)): |j|\leqslant N\}\leqslant\delta$$

かつ

$$\max\{d(f^{j+n}(x), f^{j+n}(y)): |j|\leqslant N\}\leqslant\delta$$

が成り立つ．この2つの関係式と (19・4) から

$$\max\{d(f^j(x), f^j(y)): 0\leqslant j\leqslant n\}\leqslant\delta.$$

これは $\{x, y\}$ が (n,δ)-分離集合であることに反する．

ゆえに，$X\times X$ の部分集合 $\{(x, f^n(x)): x\in E_z\}$ は $(1,\beta)$-分離集合である．だから，$\sharp E_z\leqslant K$ である．よって

$$s_n(\delta, X)=\sharp E\leqslant K\cdot\sharp F=Ks_n(\varepsilon, X)$$

が成り立つ（この補題の証明には明記性の仮定を使っていない）

補題 19・2　$\varepsilon>0$ は十分小さいとする．このとき実数 $D_\varepsilon>0$ が存在して，任意の有限の自然数の組 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ に対し

$$s_{n_1+\cdots+n_k}(\varepsilon, X)\leqslant\prod_{i=1}^{k}D_\varepsilon s_{n_i}(\varepsilon, X)$$

が成り立つ．

証明　部分集合 E は $(n_1+\cdots+n_k, \varepsilon)$-分離集合とし，$1\leqslant i\leqslant k$ なる i に対し，F_i は最大濃度をもつ $(n_i, \varepsilon/2)$-分離集合とする．

点 x は任意とする．F_1 の濃度の最大性によって

$$\max\{d(f^j(x), f^j(z_1(x))) : 0\leqslant j\leqslant n_1-1\}\leqslant\varepsilon/2$$

を満たす $z_1(x)\in F_1$ が存在する．同様にして，点 $f^{n_1}(x)$ に対し

$$\max\{d(f^{n_1+j}(x), f^j(z_2(x))) : 0\leqslant j\leqslant n_2-1\}\leqslant\varepsilon/2$$

を満たす $z_2(x)\in F_2$ が存在する．このことをくりかえすとき，$1\leqslant i\leqslant k$ なる i に対し

$$\max\{d(f^{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}(x), f^j(z_i(x))) : 0\leqslant j\leqslant n_i-1\}\leqslant\varepsilon/2$$

を満たすように $z_i(x)\in F_i$ が存在する．よって

$$\varphi : x\longmapsto\varphi(x)=(z_1(x), \cdots, z_k(x))$$

が定義される．φ は単射である．何故ならば，$x, y\in E$ に対し，$\varphi(x)=\varphi(y)$ とすると $z_i(x)=z_i(y)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ から，$1\leqslant i\leqslant k$ なる i と $0\leqslant j\leqslant n_i-1$ なる j に対し

$$\begin{aligned}
&d(f^{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}(x), f^{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}(y))\\
&\leqslant d(f^{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}(x), f^{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}(z_i(x)))\\
&\quad+d(f^{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}(z_i(x)), f^{n_1+\cdots+n_{i-1}+j}(y))\\
&\leqslant\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．しかし，E は $(n_1+\cdots+n_k, \varepsilon)$-分離集合であるから，$x=y$ である．よって

$$\sharp E\leqslant\prod_{i=1}^{k}\sharp F_i=\prod_{i=1}^{k}s_{n_i}(\varepsilon/2, X)$$

が求まる．補題 19·1 より

$$s_{n_i}(\varepsilon/2, X)\leqslant C_{\varepsilon/2,\varepsilon}\, s_{n_i}(\varepsilon, X)$$

であるから，$D_\varepsilon=\prod_{i=1}^{k}C_{\varepsilon/2,\varepsilon}$ とおくと補題が得られる（この補題の証明には拡大性の条件だけが使われた）

補題 19·3 $\varepsilon>0$ は十分小さいとする．このとき，実数 $E_\varepsilon>0$ が存在して任意の有限の自然数の組 $(n_1, \cdots, n_k)$ に対し

$$s_{n_1+\cdots+n_k}(\varepsilon, X)\geqslant\prod_{i=1}^{k}E_\varepsilon s_{n_i}(\varepsilon, X)$$

が成り立つ．

証明　証明には明記性と拡大性の2つの条件が使われる．

$1 \leqslant i \leqslant k$ なる i に対し，E_i は最大濃度をもつ $(n_i, 3\varepsilon)$-分離集合とする．$M = M(\varepsilon) > 0$ は明記性の定義にあらわれる数とし，

$$n_0 = 0$$
$$a_i = n_1 + \cdots + n_{i-1} + (i-1)M \quad (1 \leqslant i \leqslant k)$$
$$m = n_1 + \cdots + n_k + (k-1)M$$

とおく．明記性によって，任意の $z = (z_1, \cdots, z_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ に対し，$m+M$ 周期点 $x = x(z)$ が存在して

$$(19\cdot5) \quad d(f^{a_i+j}(x), f^j(z_i)) \leqslant \varepsilon \quad (0 \leqslant j \leqslant n_i, 1 \leqslant i \leqslant k)$$

とできる．明らかに

$$E = \{x(z) : z \in E_1 \times \cdots \times E_k\}$$

は (m, ε)-分離集合である．このことを確かめよう．$z, z' \in E_1 \times \cdots\cdots \times E_k$ なる異なった点 $z \neq z'$ に対して，点 $x = x(z)$，$y = y(z) \in E$ が存在する．$z \neq z'$ だから，$z_i \neq z_i'$ なる i が存在する．よって

$$\max\{d(f^j(z_i), f^j(z_i')) : 0 \leqslant j \leqslant n_i - 1\} > 3\varepsilon$$

である．しかし，(19・5) によって

$$d(f^{a_i+j}(x), f^j(z_i)) \leqslant \varepsilon, \quad d(f^{a_i+j}(y), f^j(z_i')) \leqslant \varepsilon$$
$$(0 \leqslant j \leqslant n_i, 1 \leqslant i \leqslant k)$$

である．だから

$$\max\{d(f^{a_i+j}(x), f^{a_i+j}(y)) : 0 \leqslant j \leqslant n_i - 1\} > \varepsilon \ (1 \leqslant i \leqslant k)$$

である．このことは E が (m, ε)-分離集合であることを示している．

z, $z' \in F_1 \times \cdots \times E_k$ に対し，$z \neq z'$ ならば E の点 $x(z)$，$x(z')$ が存在して $x(z) \neq x(z')$ である．このことは $x(z) = x(z')$ を仮定して (19・5) と E が (m, ε)-分離集合であることを使って矛盾を導き出すことによって得られる．

ゆえに

$$\prod_{i=1}^{k} s_{n_i}(3\varepsilon, X) \leqslant s_m(\varepsilon, X)$$

が成り立つ．一方，補題19・2より

$$s_m(\varepsilon, X) \leqslant D_\varepsilon^k s_{n_1+\cdots+n_k}(\varepsilon, X)\{s_M(\varepsilon, X)\}^{k-1}$$

が求まる．補題19・1より

$$C_{\varepsilon,3\varepsilon}{}^{-1}s_{n_i}(\varepsilon, X)\leqslant s_{n_i}(3\varepsilon, X)$$

である．ここで

$$E_\varepsilon=\{C_{\varepsilon,3\varepsilon}D_\varepsilon s_M(\varepsilon, X)\}^{-1}$$

とおけば，結論が得られる．

補題 19·4 f の位相的エントロピーを $h(f)=h$ と表すことにしよう．十分小さい $\varepsilon>0$ に対し

$$D_\varepsilon{}^{-1}2^{hn}\leqslant s_n(\varepsilon, X)\leqslant E_\varepsilon{}^{-1}2^{hn}\quad(n\geqslant 0)$$

が成り立つ．

証明 ある $n\geqslant 0$ に対し，$s_n(\varepsilon, X)<D_\varepsilon{}^{-1}2^{hn}$ であったと仮定すると，補題 19·3 より

$$s_{kn}(\varepsilon, X)\leqslant\{D_\varepsilon s_n(\varepsilon, X)\}^k.$$

よって

$$s_{kn}(\varepsilon, X)<2^{hnk}$$

が求まる．定理 19·1 により

$$h(f)=h=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{kn}\log s_{nk}(\varepsilon, X)$$

ゆえに

$$h<\frac{1}{kn}\log 2h^{hnk}=h$$

となって矛盾が起こる．同様にして後半の不等式は補題 19·3 を使って証明できる．

補題 19·5 2つの定数 $E>D>0$ が存在して，十分大きな $n>0$ に対し

$$D2^{hn}\leqslant \sharp P_n(f)\leqslant E2^{hn}$$

が成り立つ．

証明 $0<\varepsilon<c/2$ とする．このとき，n 周期点の集合 $P_n(f)$ は (n, ε)-分離集合である．よって $\sharp P_n(f)\leqslant s_n(\varepsilon, X)$ である．補題 19·4 によって

$$\sharp P_n(f)\leqslant E2^{hn}$$

である．ここに $E=E_\varepsilon{}^{-1}$ である．

さて，$M=M(\varepsilon)>0$ は明記性の定義にあらわれる数とし，$n>M$ に対し $\tilde{E}$ を

$(n-M, 3\varepsilon)$-分離集合とする．明記性によって任意の $z\in\tilde{E}$ に対し $x(z)\in P_n(f)$ が存在して

$$d(f^j(z), f^j(x(z)))\leqslant\varepsilon \quad (0\leqslant j<n-M)$$

とできる．$z\neq z'$ のとき，$x(z)\neq x(z')$ である．何故ならば，$x(z)=x(z')$ とすると，$0\leqslant j\leqslant n-M$ なるすべての j に対し

$$d(f^j(z), f^j(z'))\leqslant d(f^j(z), f^j(x(z)))+d(f^j(x(z')), f^j(z'))<2\varepsilon.$$

しかし，$\tilde{E}$ が $(n-M, 3\varepsilon)$-分離集合であることに反する．
ゆえに補題 19·4 によって

$$\sharp P_n(f)\geqslant s_{n-M}(3\varepsilon, X)\geqslant D_{3\varepsilon}^{-1}2^{h(n-M)}=D2^{hn}$$

が求まる．ここに $D=\{D_{3\varepsilon}2^{hM}\}^{-1}$ である．

定理 19·3 の証明　補題 19·5 より，$\log D+hn\leqslant\log\sharp P_n(f)\leqslant\log E+hn$ である．よって定理 19·3 が成り立つ．

第7章　積分と確率測度

この章では確率空間の基礎理論を解説する．§20 では，測度空間と可測関数の積分に関する基礎理論を扱い，単調収束定理，Fatou の定理，Lebesgue の収束定理を証明する．また，有限測度空間の上の σ-加法的集合関数に関する Lebesgue-Radon-Nikodym の定理を証明する．§21 は，k 次元ユークリッド空間の上の Lebesgue 測度の構成とその平行移動による不変性および k 次元トーラスの上の Lebesgue 測度の構成を扱う．

§20　積分の定義とその性質

X を1つの空でない集合とし，$\mathscr{F}$ を X の部分集合からなる集合族とする．$\mathscr{F}$ が次の（1），（2），（3）を満たすとき，$\mathscr{F}$ を X における**集合体**という．

（1）　$X\in\mathscr{F}$.

（2）　$A\in\mathscr{F} \Rightarrow A^c\in\mathscr{F}$.

（3）　$A, B\in\mathscr{F} \Rightarrow A\cup B\in\mathscr{F}$.

集合体が（1），（2）および次の（4）を満たすとき，$\mathscr{F}$ を X における **σ-集合体**という．

（4）　$A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathscr{F}$.

$\mathscr{F}$ が σ-集合体のとき，$\mathscr{F}$ に属する集合を $\mathscr{F}$ の**可測集合**という．X と $\mathscr{F}$を組にした $(X, \mathscr{F})$ を**可測空間**という．$\mathscr{F}$ を σ-集合体とすると，（2）と（4）から次の（5）が導かれる．

（5）　$A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathscr{F}$.

注意 20·1　1つの空でない集合 X において次が成り立つ．

（i）　X の部分集合全体からなる集合族は，σ-集合体である．

（ii）　任意個数の σ-集合体の共通集合は，σ-集合体である．

（iii）　任意の集合族 $\mathscr{F}_0$ に対して，$\mathscr{F}_0$ を含む最小の集合体が存在する．

(X, θ) は位相空間とする．X の開集合の全体 θ を含む最小の σ-集合体を **Borel クラス**といい，$\mathscr{B}$ で表し $\mathscr{B}$ に属する集合を **Borel 集合**という．

$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．$\mathscr{F}$ の上の集合関数 μ が次の（6），（7）を満たすとき，μ を $\mathscr{F}$ の上の**測度**という．$X, \mathscr{F}, \mu$ を合わせた組 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を**測度空間**といい，$\mu(A)$ を A の測度という．

（6）　すべての $A \in \mathscr{F}$ に対し，$0 \leqslant \mu(A) \leqslant +\infty$．特に $\mu(\phi)=0$.

（7）　$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ に対し $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$ のとき

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

$\mu(X) < \infty$ なる測度 μ を**有限測度**といい，$\mu(X)=1$ のとき μ を**確率測度**という．これから先ことわらないかぎり $\mu(X)=1$ なる測度空間 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を扱う．このような空間を**確率空間**という．$\mathscr{B}$ の上の確率測度を Borel **確率測度**という．

注意 20・2　μ を $\mathscr{F}$ の上の有限測度とし，$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ とするとき

（i）　$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Rightarrow \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

（ii）　$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \Rightarrow \mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

が成り立つ（(i) は有限測度でなくても成り立つ）．

証明　（i）の証明：$B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(n=2, 3, \cdots)$ とおくと，$B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{F}$, $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ であり，$B_1, B_2, \cdots$ は互いに共通部分をもたないから

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

（ii）の証明：$B_n = A_1 \setminus A_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおくと，明らかに $B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{F}$ である．すべての $n \geqslant 1$ に対し，A_n と B_n は互いに共通部分がなく，$A_1 = A_n \cup B_n$ であるから

$$1 \geqslant \mu(A_1) = \mu(A_n) + \mu(B_n)$$

である．$B_n \nearrow$ で，$A_1=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$ から

$$\begin{aligned}\mu(A_1)&=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)+\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)+\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)\\&=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)+\lim_{n\to\infty}\{\mu(A_1)-\mu(A_n)\}\\&=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)+\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

である．

可測空間 $(X,\mathscr{F})$ において，X の上の実数値関数 ξ が $\mathscr{F}$-**可測**であるとは，任意の実数 $a\in\boldsymbol{R}$ に対し，

（8）　$\{x\in X:\xi(x)<a\}\in\mathscr{F}$

を満たすときをいう．よって，位相空間の上の実数値連続関数は，$\mathscr{B}$-可測（$\mathscr{B}$ は Borel クラス）である．

注意 20・3　（8）は次の（i），(ii)，(iii) と同値である．任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対し，

（i）　$\{x\in X:\xi(x)\geqslant a\}\in\mathscr{F}$.

（ii）　$\{x\in X:\xi(x)\leqslant a\}\in\mathscr{F}$.

（iii）　$\{x\in X:\xi(x)>a\}\in\mathscr{F}$.

証明　$\{x\in X:\xi(x)\geqslant a\}=X\setminus\{x\in X:\xi(x)<a\}$, $\{x\in X:\xi(x)>a\}=X\setminus\{x\in X:\xi(x)\geqslant a\}$ であるから，（8）と（i）は同値である．ところで

$$\left\{x\in X:\xi(x)\leqslant a\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X:\xi(x)<a+\frac{1}{n}\right\},$$

$$\left\{x\in X:\xi(x)<a\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X:\xi(x)\leqslant a-\frac{1}{n}\right\}$$

であるから，（8）と（ii）は同値である．上と同様にして（ii）と（iii）は同値である．

注意 20·4　ξ,η が $\mathscr{F}$-可測ならば，$\{x\in X:\xi(x)<\eta(x)\}\in\mathscr{F}$ である．

証明　有理数の全体を Q で表すと

$$\{x\in X:\xi(x)<\eta(x)\}=\bigcup_{r\in Q}(\{x\in X:\xi(x)<r\}\cap\{x\in X:r<\eta(x)\})\in\mathscr{F}$$

である．

注意 20·5　ξ,η は $\mathscr{F}$-可測とすれば，次の（i）～（v）の関数は $\mathscr{F}$-可測である．

（i）　$b\xi\ (b\in\boldsymbol{R})$.　（ii）　$\xi+\eta$.　（iii）　$|\xi|^2$.　（iv）　$\xi\eta$

（v）　$\max\{\xi,\eta\}$.　$\min\{\xi,\eta\}$.

証明　（i）の証明：$b=0$ のとき，$b\xi=0$ であるから明らかである．$b\neq0$ の場合は

$$\{b\xi<a\}=\begin{cases}\{\xi<a/b\}\in\mathscr{F} & (b>0)\\ \{\xi>a/b\}\in\mathscr{F} & (b<0)\end{cases}$$

であるから，$b\xi$ は $\mathscr{F}$-可測である．

（ii）の証明：$-\eta+a$ は $\mathscr{F}$-可測関数であるから，注意 20·4 により

$$\{\xi+\eta<a\}=\{\xi<-\eta+a\}\in\mathscr{F}.$$

よって $\xi+\eta$ は $\mathscr{F}$-可測である．

（iii）の証明：$\{-a^{1/2}<\xi<a^{1/2}\}\in\mathscr{F}$ であるから，明らかである．

（iv）の証明：$\xi\eta=\{(\xi+\eta)^2-(\xi-\eta)^2\}/4$ であるから，（i），（ii），（iii）より明らかである．

（v）の証明：
$$\{\max\{\xi,\eta\}<a\}=\{\xi<a\}\cap\{\eta<a\}\in\mathscr{F}$$
$$\{\min\{\xi,\eta\}<a\}=\{\xi<a\}\cup\{\eta<a\}\in\mathscr{F}$$

であるから，$\max\{\xi,\eta\},\min\{\xi,\eta\}$ は $\mathscr{F}$-可測である．

注意 20·6　$\mathscr{F}$-可測関数 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ に対しては

$$\sup_{n\geq1}\xi_n,\quad \inf_{n\geq1}\xi_n,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_n,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\xi_n$$

も $\mathscr{F}$-可測となる．

証明

$$\{\sup_{n\geqq 1} \xi_n < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\xi_n < a - \frac{1}{k}\right\} \in \mathscr{F},$$

$$\{\inf_{n\geqq 1} \xi_n < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi_n < a\} \in \mathscr{F}$$

であるから，$\sup_{n\geqq 1} \xi_n$, $\inf_{n\geqq 1} \xi_n$ は $\mathscr{F}$-可測である．$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi_n$ の定義から $\mathscr{F}$-可測がわかる．

関数 ξ に対し

$$\xi^+(x) = \max\{\xi(x), 0\}, \quad \xi^-(x) = \max\{-\xi(x), 0\}$$

とおくと

$$\xi^+ \geqq 0, \xi^- \geqq 0, \quad \xi = \xi^+ - \xi^-, \quad |\xi| = \xi^+ + \xi^-$$

である．この ξ^+, ξ^- をそれぞれ ξ の**正の部分**，**負の部分**という．ξ が $\mathscr{F}$-可測ならば，ξ^+, ξ^- もそうである．

集合 A に対し，A の定義関数 1_A を

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

によって定義する．1_A が $\mathscr{F}$-可測であるための必要十分条件は，$A \in \mathscr{F}$ が成り立つことである．有限個の定義関数の一次結合

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \quad (a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{R})$$

の関数を**単純関数**という．$A_1, \cdots, A_n$ が $\mathscr{F}$-可測ならば，ξ も $\mathscr{F}$-可測である．

注意 20·7 （1） $\mathscr{F}$-可測関数 ξ が非負であるとする．このとき

$$\xi_n(x) \geqq 0, \qquad \xi_n(x) \nearrow \xi(x)$$

がすべての $x \in X$ で成り立つ可測単純関数列 $\{\xi_n\}$ が存在する．

証明 $i = 0, 1, \cdots, n2^n - 1$, $n = 1, 2, \cdots$ に対し

$$A_{n,i} = \{i/2^n \leqq \xi < (i+1)/2^n\}, \quad A_{n, n2^n} = \{\xi \geqq n\}$$

とおき

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n2^n} i 1_{A_{n,i}} / 2^n$$

を定義すると，$\xi_1, \xi_2, \cdots$ は $\mathscr{F}$-可測単純関数の単調増加列である．しかもすべての点 x で，十分大きな n に対しては

$$0 \leqslant \xi(x) - \xi_n(x) < 1/2^n$$

となるから，$\xi_n(x) \nearrow \xi(x)$ がすべての点で成り立つ．

（2）　$\mathscr{F}$-可測関数 ξ に対し

$$|\xi_n(x)| \leqslant |\xi(x)|, \qquad \xi_n(x) \to \xi(x)$$

がすべての点 x で成り立つ $\mathscr{F}$-可測単純関数列 $\{\xi_n\}$ が存在する．

証明　（1）より，ξ^+, ξ^- に対し

$$\eta_n(x) \geqslant 0,\ \ \eta_n(x) \nearrow \xi^+(x),\ \ \lambda_n(x) \geqslant 0,\ \ \lambda_n(x) \nearrow \xi^-(x)$$

がすべての点 x で成り立つ $\mathscr{F}$-可測単純関数列 $\{\eta_n\}, \{\lambda_n\}$ が存在する．

$$\xi_n = \eta_n - \lambda_n \quad (n \geqslant 1)$$

とおくと，$\{\xi_n\}$ は（2）の条件を満たす $\mathscr{F}$-可測単純関数列である．

測度空間 $(X, \mathscr{F} \mu)$（確率空間でなくてもよい）において，$p(x)$ を $x \in X$ に関する1つの命題とする．X から適当な測度0の集合を除けば，そこで $p(x)$ が成り立っているとき，すなわち

$$\{x \in X : p(x) \text{ が成立しない}\} \subset N,\ \ N \in \mathscr{F},\ \ \mu(N) = 0$$

を満たす N が存在するとき，$p(x)$ は **μ に関してほとんどいたるところ**で成り立つという．このことを簡単に μ-$a.e.$ で成立すると書く．

$(X, \mathscr{F}, \mu)$ は有限測度空間とする．いまから X の上の $\mathscr{F}$-可測実数値関数 ξ の積分

$$\int_X \xi d\mu$$

を

（i）　ξ が $\mathscr{F}$-可測非負単純関数の場合

（ii）　ξ が $\mathscr{F}$-可測非負関数の場合

（iii）　ξ が $\mathscr{F}$-可測関数の場合

の順序で定義を与えてゆく．積分 $\int_X \xi d\mu$ を $\int_X \xi d\mu(x)$, $\int_X \xi \mu(dx)$ などと書くこともある．

（i）の場合：関数 ξ は

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}a_i 1_{A_i}\quad (a_1, \cdots, a_n>0)$$

と表され，特に $\mathscr{F}$-可測集合 $A_1, \cdots, A_n$ は互いに共通部分をもたないようにできる．そこで積分を

$$\int_X \xi d\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)$$

によって定義する．

注意 20・8　ξ の積分は ξ を定義関数の一次結合として表す仕方に依存しないで一意的に定義できる．

証明　$A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{F}$ は互いに共通部分をもたないで，$a_1, \cdots, a_n$ は正の実数とし，$B_1, \cdots B_m\in\mathscr{F}$ も互いに共通部分をもたないで，$b_1, \cdots, b_m$ は正の実数とするとき，$\sum_{i=1}^{n}a_i 1_{A_i}(x)=\sum_{j=1}^{m}b_j 1_{B_j}(x)$ ならば，$\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i)=\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(B_j)$ を示せばよい．

$A_i\cap B_j(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m)$ は互いに共通部分をもたないので

$$\sum_{i,j}a_i 1_{A_i\cap B_j}=\sum_i a_i 1_{A_i}=\sum_j b_j 1_{B_j}=\sum_{i,j}b_j 1_{A_i\cap B_j}$$

であるから，$A_i\cap B_j\neq\phi$ のとき $a_i=b_j$ である．よって，$a_i\mu(A_i\cap B_j)=b_j\mu(A_i\cap B_j)$．だから

$$\sum_i a_i\mu(A_i)=\sum_{i,j}a_i\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{i,j}b_j\mu(A_i\cap B_j)=\sum_j b_j\mu(B_j)$$

が成り立つ．

注意 20・9　ξ, η は $\mathscr{F}$-可測非負単純関数とする．このとき次が成り立つ．

（1）$\int_X(\xi+\eta)d\mu=\int_X\xi d\mu+\int_X\eta d\mu.$

（2）$\xi\geqslant\eta \ \Rightarrow\ \int_X\xi d\mu\geqslant\int_X\eta d\mu.$

証明　（1）の証明；$\mathscr{F}$-可測非負単純関数 $\xi=\sum_{i=1}^{n}a_i 1_{A_i}$ において，$A_1, \cdots, A_n$ は互いに共通部分がなく，$a_1, \cdots, a_n$ は正の実数とし，$\mathscr{F}$-可測非負単純関数 $\eta=\sum_{j=1}^{m}b_i 1_{B_j}$ において，$B_1, \cdots, B_m, b_1, \cdots, b_m$ は上と同じ条件であるとする．このと

き, $\xi+\eta$ は $A_i\cap B_j$ では a_i+b_j 値を, $A_i'=A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{m}B_j$ では a_i の値を, $B_j'=B_j\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ では b_j の値をとるから

$$\begin{aligned}\int_X(\xi+\eta)\,d\mu&=\sum_{i,j}(a_i+b_j)\mu(A_i\cap B_j)+\sum_i a_i\mu(A_i')+\sum_j b_j\mu(B_j')\\&=\sum_i a_i\{\sum_j\mu(A_i\cap B_j)+\mu(A_i')\}\\&\quad+\sum_j b_j\{\sum_i\mu(A_i\cap B_j)+\mu(B_j')\}\\&=\sum_i a_i\mu(A_i)+\sum_j b_j\mu(B_j)\\&=\int_X\xi d\mu+\int_X\eta d\mu.\end{aligned}$$

（2）の証明; $\xi-\eta$ は $\mathscr{F}$-可測非負単純関数であるから,（1）によって

$$\int_X\xi d\mu=\int_X\xi d\mu+\int_X(\xi-\eta)\,d\mu\geqslant\int_X\eta d\mu$$

である.

注意 20・10　$\xi_1,\xi_2,\cdots,\eta$ は $\mathscr{F}$-可測非負単純関数で

$$\xi_n\nearrow,\ \lim_{n\to\infty}\xi_n\geqslant\eta\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\int_X\xi_n d\mu\geqslant\int_X\eta d\mu$$

である.

証明　$A=\{x\in X:\eta(x)>0\}$, $\alpha=\min\{\eta(x):x\in A\}$ とおき, $0<\varepsilon<\alpha$ なる任意の ε に対し

$$A_n(\varepsilon)=\{x\in X:\xi_n(x)>\eta(x)-\varepsilon\}$$

とおく. このとき $\xi_n\nearrow$ かつ $\lim_n\xi_n\geqslant\eta$ であるから, $A_n(\varepsilon)\nearrow A$ を得る. よって

$$\int_X\varepsilon 1_{A_n(\varepsilon)}d\mu\leqslant\varepsilon\mu(A)<\infty.$$

$\beta=\max\{\eta(x):x\in X\}$ とおくと

$$\int_X\eta 1_{A\setminus A_n(\varepsilon)}d\mu\leqslant\beta\mu(A)$$

である. 注意20・9より

$$\int_X \xi_n d\mu \geqq \int_X (\eta-\varepsilon)1_{A_n(\varepsilon)} d\mu = \int_X \eta 1_{A_n(\varepsilon)} d\mu - \int_X \varepsilon 1_{A_n(\varepsilon)} d\mu$$
$$= \int_X \eta d\mu - \int_X \eta 1_{A \setminus A_n(\varepsilon)} d\mu - \varepsilon\mu(A_n(\varepsilon))$$
$$\geqq \int_X \eta d\mu - \int_X \beta 1_{A \setminus A_n(\varepsilon)} d\mu - \varepsilon\mu(A_n(\varepsilon))$$
$$= \int_X \eta d\mu - \beta\mu(A \setminus A_n(\varepsilon)) - \varepsilon\mu(A_n(\varepsilon)).$$

明らかに，$\mu(A\setminus A_n(\varepsilon)) \leqq \mu(A) < \infty$ かつ $A\setminus A_n(\varepsilon) \searrow \phi$ であるから

$$\lim_n \int_X \xi_n d\mu \geqq \int_X \eta d\mu - \beta\cdot 0 - \varepsilon\mu(A).$$

ε は任意であるから，$\varepsilon \to 0$ とすれば，結論を得る．

（ii）の場合；ξ に対し $\xi_n \geqq 0$, $\xi_n \nearrow \xi$ を満たす $\mathscr{F}$-可測単純関数列 $\{\xi_n\}$ が存在する（注意 20·7）．（i）より

$$\int_X \xi_n d\mu$$

が定義され，$\int_X \xi_n d\mu$ は n に関して単調増加である．よって，ξ の積分を

$$\int_X \xi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \xi_n d\mu$$

によって定義する．

注意 20·11 この積分の定義は ξ へ収束する単純関数列のとり方に依存しない．

証明 $\xi_n \geqq 0$, $\xi_n \nearrow \xi$ そして $\eta \geqq 0$, $\eta_n \nearrow \xi$ を満たす $\mathscr{F}$-可測単純関数列 $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ に対し

$$\lim_n \int_X \xi_n d\mu = \lim_n \int_X \eta_n d\mu$$

を示せばよい．

任意の $m \geqq 1$ に対し，$\lim_n \xi_n \geqq \eta_m$ であるから，注意 20·10 より

$$\lim_n \int_X \xi_n d\mu \geqq \int_X \eta_m d\mu.$$

だから

$$\lim_n \int_X \xi_n d\mu \geqq \lim_m \int_X \eta_m d\mu.$$

同様にして逆向きの不等式が成り立つから，求める等式が得られる．

(iii) の場合；ξ は ξ^+ と ξ^- によって，$\xi=\xi^+-\xi^-$ と分解される．

$$\int_X \xi^+ d\mu, \quad \int_X \xi^- d\mu$$

の少なくとも一方が有限のとき，ξ の**積分が確定**するといい，ξ の積分を

$$\int_X \xi d\mu = \int_X \xi^+ d\mu - \int_X \xi^- d\mu$$

によって定義する．ξ の分解は一意的であるから，ξ の積分が一意的に定義される．

$$\int_X |\xi| d\mu = \int_X \xi^+ d\mu + \int_X \xi^- d\mu < \infty$$

のとき，ξ は μ-**可積分**であるという．μ-可積分な実数値関数 ξ, η に対し次が成り立つ．

（1）　$\xi \geqq \eta$　μ-$a.e.$　$\Rightarrow$　$\int_X \xi d\mu \geqq \int_X \eta d\mu.$

（2）　任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\int_X a\xi d\mu = a \int_X \xi d\mu.$

（3）　$\int_X (\xi+\eta) d\mu = \int_X \xi d\mu + \int_X \eta d\mu.$

ξ は $\mathscr{F}$-可測関数で $A \in \mathscr{F}$ とする．$1_A(x)\xi(x)$ の積分が確定するとき，積分 $\int_X 1_A \xi d\mu$ を

$$\int_A \xi d\mu$$

で表す．

定理 20・1　ξ, η は可積分関数とする．このとき任意の $A \in \mathscr{F}$ に対し

$$\int_A \xi d\mu = \int_A \eta d\mu$$

であるための必要十分条件は，$\xi=\eta$　μ-$a.e.$ が成り立つことである．

証明　$\zeta=\xi-\eta$ とすると，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対し，$\int_A \zeta(x) d\mu = 0$ である．だ

から

$$A^+=\{x\in X:\zeta(x)\geqslant 0\},\quad A^-=\{x\in X:\zeta(x)<0\}$$

とおけば，仮定によって $\int_{A^+}\zeta d\mu=0,\ \int_{A^-}\zeta d\mu=0.$ よって

$$\int_X|\zeta|d\mu=\int_X\zeta^+d\mu+\int_X\zeta^-d\mu=0.$$

ところで，すべての $n\geqslant 1$ に対し

$$\frac{1}{n}\mu\left(\left\{x\in X:|\zeta|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\right)\leqslant\int_X|\zeta|d\mu=0$$

であるから

$$\mu\left(\left\{x\in X:|\zeta|>0\right\}\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in X:|\zeta|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\right)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x\in X:|\zeta|\geqslant\frac{1}{n}\right\}\right)=0$$

である．よって $|\zeta|=0$ μ-$a.e.$ が成り立つ．だから $\zeta=0$ μ-$a.e.$ すなわち $\xi=\eta$ μ-$a.e.$ である．逆は上の（1）より明らかである．

定理 20·2（単調収束定理）可積分関数列 $\{\xi_n\}$ が $\xi_n\geqslant 0$ μ-$a.e.$ $(n=1,2,\cdots)$ で，$\xi_n\nearrow\xi$ μ-$a.e.$ を満たせば

$$\lim_n\int_X\xi_n d\mu=\int_X\xi d\mu$$

である．

証明　$\xi_n\leqslant\xi$ μ-$a.e.$ であるから

$$\lim_n\int_X\xi_n d\mu\leqslant\int_X\xi d\mu.$$

よって

$$\lim_n\int_X\xi_n d\mu\geqslant\int_X\xi d\mu$$

を示せばよい．各 ξ_n に対し

$$\xi_{n,i}\geqslant 0,\quad \xi_{n,i}\nearrow\xi_n\quad(i\to\infty)$$

を満たす単純関数列 $\{\xi_{n,i}\}_{i\geqslant 1}$ をとり

$$\eta_i=\max_{1\leqslant n\leqslant i}\xi_{n,i}\quad(i=1,2,\cdots)$$

とおくと，η_i は単純関数で

$$\eta_i\nearrow,\ \xi_{n,i}\leqslant\eta_i\leqslant\xi_i\ \ \mu\text{-}a.e.\quad(n\leqslant i).$$

上の不等式で，まず $i\to\infty$ とし，次に $n\to\infty$ とすると

$$\lim_{i\to\infty}\eta_i=\xi\ \ \mu\text{-}a.e.$$

である．よって非負関数 ξ の積分の定義から

$$\lim_i\int_X\eta_i d\mu=\int_X\xi d\mu.$$

$\eta_i\leqslant\xi_i$ μ-$a.e.$ であるから

$$\lim_i\int_X\xi_i d\mu\geqslant\int_X\xi d\mu.$$

定理 20・3 (Fatou の定理)　$\xi_1,\xi_2,\cdots,\eta$ は可積分関数とする．このとき

（1）　$\xi_n\geqslant\eta$ μ-$a.e.$　$(n=1,2,\cdots)$ ならば

$$\int_X\varliminf_n\xi_n d\mu\leqslant\varliminf_n\int_X\xi_n d\mu.$$

（2）　$\xi_n\leqslant\eta$ μ-$a.e.$　$(n=1,2,\cdots)$ ならば

$$\int_X\varlimsup_n\xi_n d\mu\geqslant\varlimsup_n\int_X\xi_n d\mu.$$

証明　（1）の証明；$\zeta_n=\inf\limits_{i\geqslant n}(\xi_i-\eta)$, $n=1,2,\cdots$ とおけば，$\zeta_n\geqslant 0$, $\zeta_n\nearrow\varliminf\limits_n(\xi_n-\eta)$ μ-$a.e.$ よって

$$\int_X\varliminf_n\xi_n d\mu-\int_X\eta d\mu=\int_X(\varliminf_n\xi_n-\eta)\,d\mu=\int_X\varliminf_n(\xi_n-\eta)d\mu$$
$$=\int_X\lim_n\zeta_n d\mu.$$

定理 20・2 より

$$\int_X\lim_n\zeta_n d\mu=\lim_n\int_X\zeta_n d\mu$$

が成り立つ．よって

$$\lim_n\int_X\zeta_n d\mu=\lim_n\int_X\inf_{i\geqslant n}(\xi_i-\eta)\,d\mu\leqslant\varliminf_n\int_X(\xi_n-\eta)d\mu$$
$$=\varliminf_n\left\{\int_X\xi_n d\mu-\int_X\eta d\mu\right\}=\varliminf_n\int_X\xi_n d\mu-\int_X\eta d\mu.$$

ここに $\int_X |\eta| d\mu < \infty$ であるから

$$\int_X \underline{\lim_n}\, \xi_n d\mu \leqq \underline{\lim_n} \int_X \xi_n d\mu.$$

（2）の証明；仮定から，$-\xi_n \geqq -\eta$ μ-$a.e.$ であり $-\eta$ は可積分であるから（1）より

$$\int_X \overline{\lim_n}\, \xi_n d\mu = -\int_X \underline{\lim_n}(-\xi_n) d\mu \geqq -\underline{\lim_n} \int_X (-\xi_n) d\mu$$

$$= \overline{\lim_n} \int_X \xi_n d\mu.$$

定理 20·4 (Lebesgue の収束定理) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \eta$ は可積分関数とする．このとき $|\xi_n| \leqq \eta$ μ-$a.e.$ $(n=1, 2, \cdots)$ で，$\lim_{n\to\infty} \xi_n$ が μ-$a.e.$ で存在すれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \xi_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \xi_n d\mu.$$

証明 前定理より明らかである．

$(X, \mathscr{F})$ を可測空間とする．$\mathscr{F}$ の上の実数値集合関数 φ が次の（1）を満たすとき，φ を $\mathscr{F}$ の上の **σ-加法的集合関数**という．

（1） (σ-加法性) 互いに共通部分のない可算無限個の $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ に対し

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

φ が $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数ならば，$\varphi(\phi) = \varphi(\phi) + \varphi(\phi) + \cdots$ であるから，$\varphi(\phi) = 0$ である．特に $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$ のとき

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$$

である．したがって，φ は有限加法性をもつ．明らかに，$\mathscr{F}$ の上の非負 σ-加法的集合関数は $\mathscr{F}$ の上の有限測度である．有限測度空間 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ において，ξ を可積分関数とするとき

$$\varphi(A) = \int_A \xi d\mu$$

によって定義される φ は $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数である．

注意 20・12　φ を $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数とすると，$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ が単調列ならば

$$\varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

証明　注意 20・2 の証明において，μ の非負性は用いていなかった．よって μ を φ でおきかえれば，その証明はそのまま適用できる．

φ を $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数とするとき，$A \in \mathscr{F}$ に対し

$$\varphi^+(A) = \sup\{\varphi(B) : B \subset A, B \in \mathscr{F}\},$$

$$\varphi^-(A) = \sup\{-\varphi(B) : B \subset A, B \in \mathscr{F}) = -\inf\{\varphi(B) : B \subset A, B \in \mathscr{F}\},$$

$$\|\varphi\|(A) = \varphi^+(A) + \varphi^-(A)$$

とおく．このとき $\varphi^+, \varphi^-, \|\varphi\|$ をそれぞれ φ の**正変分**，**負変分**，**全変分**という．

注意 20・13　$\varphi^+, \varphi^-, \|\varphi\|$ はいずれも $\mathscr{F}$ の上の有限測度である．

証明　まず，φ^+ が $\mathscr{F}$ の上の有限測度であることを示そう．$\varphi(\phi)=0$ であるから，$\varphi^+(A) \geqslant 0$，$\varphi^+(\phi)=0$．$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ が互いに共通部分のないとき，$B \subset \bigcup_i A_i, B \in \mathscr{F}$ なる任意の B に対し

$$\varphi(B) = \sum_i \varphi(B \cap A_i) \leqslant \sum_i \varphi^+(A_i).$$

したがって，このような B の全体について左辺 $\varphi(B)$ の上限をとれば

$$\varphi^+(\bigcup_i A_i) \leqslant \sum_i \varphi^+(A_i)$$

である．一方，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\varphi^+(A_i) - \varepsilon/2^i \leqslant \varphi(B_i), \quad B_i \subset A_i, B_i \in \mathscr{F} \quad (i=1, 2, \cdots)$$

を満たす B_i が存在する．$\bigcup_i B_i \subset \bigcup_i A_i$, $\bigcup_i B_i \in \mathscr{F}$ であるから

$$\sum_i \varphi^+(A_i) - \varepsilon \leqslant \sum_i \varphi(B_i) = \varphi(\bigcup_i B_i) \leqslant \varphi^+(\bigcup_i A_i).$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$\sum_i \varphi^+(A_i) \leqslant \varphi^+(\bigcup_i A_i).$$

ゆえに，$\sum_i \varphi^+(A_i) = \varphi^+(\bigcup_i A_i)$ が成り立つ．

次に，$\varphi^+(X) < \infty$ を示そう．そのために，$\varphi^+(X) = \infty$ を仮定する．このとき

$$X_n\downarrow,\quad X_n\in\mathscr{F},\quad \varphi^+(X_n)=\infty,\quad |\varphi(X_n)|\geqslant n-1$$

を満たす $X_1, X_2, \cdots$ が存在する．何故ならば，$X_1=X$ とおく．いま，$X_1, \cdots, X_n$ まで定義されたとする．このとき $\varphi^+(X_n)=\infty$ であるから

$$A\subset X_n,\quad A\in\mathscr{F},\quad \varphi(A)\geqslant|\varphi(X_n)|+n$$

を満たす A が存在する．$\varphi^+(A)=\infty$ ならば，$X_{n+1}=A$ とおく．$\varphi^+(A)<\infty$ ならば

$$\varphi^+(X_n\setminus A)=\varphi^+(X_n)-\varphi^+(A)=\infty$$

さらに

$$|\varphi(X_n-A)|=|\varphi(X_n)-\varphi(A)|\geqslant\varphi(A)-|\varphi(X_n)|\geqslant n$$

であるから，$X_{n+1}=X_n\setminus A$ とおく．このような仕方によって $X_1, X_2, \cdots$ が定義される．注意 20・12 によって

$$\varphi(\lim_n X_n)=\lim_n \varphi(X_n)=\infty \quad \text{または} \quad -\infty$$

である．しかし，φ は実数値集合関数であることに反する．だから $\varphi^+(X)<\infty$ である．φ^+ が $\mathscr{F}$ の上の有限測度であることが示された．

次に，$(-\varphi)(A)=-\varphi(A)(A\in\mathscr{F})$ によって定義される $-\varphi$ は $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数であるから，上で示した結果によって $(-\varphi)^+$ は $\mathscr{F}$ の上の有限測度である．$\varphi^-=(-\varphi)^+$ から，φ^- は有限測度である．したがって，$\|\varphi\|$ も有限測度である．

注意 20・14　φ を $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数とし，その正変分，負変分をそれぞれ φ^+, φ^- とすると

（1）（Jordan 分解）　$\varphi(A)=\varphi^+(A)-\varphi^-(A)\quad(A\in\mathscr{F})$.

（2）（Hahn 分解）次を満たす $D\in\mathscr{F}$ が存在する；

$$\varphi^+(A)=\varphi(A\cap D),\quad \varphi^-(A)=-\varphi(A\cap D^c)\quad(A\in\mathscr{F}).$$

証明　（1）の証明；$B\subset A, B\in\mathscr{F}$ なるすべての B に対し，

$$\varphi(B)=\varphi(A)-\varphi(A\setminus B)\leqslant\varphi(A)+\varphi^-(A).$$

このような B について，$\varphi(B)$ の上限をとれば

$$\varphi^+(A)\leqslant\varphi(A)+\varphi^-(A)$$

である．同様にして

$$\varphi^-(A) \leqslant \varphi^+(A) - \varphi(A)$$

が示される．よって $\varphi(A) = \varphi^+(A) - \varphi^-(A)$.

（2）の証明；$\varphi^+(D^c) = 0$, $\varphi^-(D) = 0$ を満たす $D \in \mathscr{F}$ が存在することを示せば十分である．各 $n(=1, 2, \cdots)$ に対して

$$\varphi^+(X) - 1/2^n \leqslant \varphi(D_n)$$

を満たす $D_n \in \mathscr{F}$ を選ぶ．このとき，（1）より

$$\varphi^-(D_n) = \varphi^+(D_n) - \varphi(D_n) \leqslant \varphi^+(x) - \varphi(D_n) \leqslant 1/2^n,$$
$$\varphi^+(D_n{}^c) = \varphi^+(X) - \varphi^+(D_n) \leqslant \varphi^+(X) - \varphi(D_n) \leqslant 1/2^n.$$

いま

$$D = \underline{\lim_n} D_n$$

とおくと，$D^c = \overline{\lim_n}\, D_n{}^c \subset \bigcup_{n=m}^{\infty} D_n{}^c$ $(m=1, 2, \cdots)$ であるから

$$\varphi^+(D^c) \leqslant \lim_m \varphi^+(\bigcup_{n=m}^{\infty} D_n{}^c) \leqslant \lim_m \sum_{n=m}^{\infty} \varphi^+(D_n{}^c) \leqslant \lim_m \sum_{n=m}^{\infty} 1/2^n = 0.$$

そして

$$\varphi^-(D) \leqslant \underline{\lim_n}\, \varphi^-(D_n) \leqslant \lim 1/2^n = 0.$$

（上の不等式のはじめの不等号は Fatouの定理を適用すればよい）．これで $\varphi^+(D^c) = 0$, $\varphi^-(D) = 0$ が示された．

注意 20・15　φ を $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数とし，$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} A_n$ が存在すれば

$$\varphi(\lim_n A_n) = \lim_n \varphi(A_n).$$

証明　φ の正変分 φ^+，負変分 φ^- は有限測度であり，Jordan 分解により $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ であるから Lebesgue の収束定理を適用すれば

$$\varphi(\lim_n A_n) = \varphi^+(\lim_n A_n) - \varphi^-(\lim_n A_n)$$
$$= \lim_n \varphi^+(A_n) - \lim_n \varphi^-(A_n) = \lim_n \varphi(A_n).$$

有限測度空間 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ において，φ を $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数とす

る．φ が

$$A\in\mathscr{F},\ \mu(A)=0 \ \Rightarrow\ \varphi(A)=0$$

を満たすとき，φ は $\mathscr{F}$ において μ-**絶対連続**，または **μ に関して絶対連続**であるという．φ が

$$N\in\mathscr{F}, \mu(N)=0 \text{ なる } N \text{ が存在して，} \varphi(A)=\varphi(A\cap N)\ \ (A\in\mathscr{F})$$

を満たすとき，φ は $\mathscr{F}$ において μ-**特異**，また **μ に関して特異**であるという．

注意 20·16　(1)　$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が μ-絶対連続（μ-特異）ならば，それらの一次結合 $\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$ も μ-絶対連続（μ-特異）である．

(2)　φ が μ-絶対連続で，かつ μ-特異ならば，$\varphi(A)=0$ ($A\in\mathscr{F}$) である．

(3)　ξ が μ-可積分ならば

$$\varphi(A)=\int_A \xi d\mu \quad (A\in\mathscr{F})$$

によって定義される φ は $\mathscr{F}$ の上の μ-絶対連続な σ-加法的集合関数である．

注意 2·17　φ を $\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数とし，その全変分 $\|\varphi\|$ に対して，次の (1), (2), (3) は互いに同値である．

(1)　φ は μ-絶対連続である．

(2)　$\|\varphi\|$ は μ-絶対連続である．

(3)　任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在して

$$A\in\mathscr{F},\ \mu(A)<\delta \ \Rightarrow\ |\varphi(A)|<\varepsilon.$$

証明　(1) ⇒ (2) の証明；$A\in\mathscr{F}$, $\mu(A)=0$ とする．$B\in\mathscr{F}$, $B\subset A$ ならば，$\mu(B)=0$ である．だから $\varphi(B)=0$. したがって正変分 φ^+，負変分 φ^- の定義から $\varphi^+(A)=0$, $\varphi^-(A)=0$ である．ゆえに $\|\varphi\|(A)=0$.

(2) ⇒ (3) の証明；$|\varphi(A)|\leqq\|\varphi\|(A)$ であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在して

$$A\in\mathscr{F},\ \mu(A)<\delta \ \Rightarrow\ \|\varphi\|(A)<\varepsilon$$

であることを示せば十分である．これを否定すると

$$\mu(A_n)<1/2^n,\ \|\varphi\|(A_n)>\varepsilon \quad (n=1, 2, \cdots)$$

を満たす $\varepsilon>0$ と $A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{F}$ が存在する．ここで

$$A=\overline{\lim_n}\, A_n$$

とおくと

$$\mu(A)\leqslant\mu(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n)\leqslant \sum_{n=m}^{\infty}\mu(A_n)\leqslant \sum_{n=m}^{\infty} 1/2^n\to 0 \quad (m\to\infty)$$

であるから，$\mu(A)=0$．しかし Fatou の定理を使うと

$$\|\varphi\|(A)\geqslant \overline{\lim_n}\,\|\varphi\|(A_n)\geqslant\varepsilon.$$

これは（2）に矛盾する．

（3）⇒（1）は明らかである．

定理 20·5 (Lebesgue-Radon-Nikodym の定理)（$X, \mathscr{F}, \mu$）は有限測度空間とする．$\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数 φ は

（1） (Lebesgue 分解)　$\varphi(A)=\varphi_c(A)+\varphi_s(A)$　($A\in\mathscr{F}$)

のように μ-絶対連続な σ-加法的集合関数 φ_c と μ-特異な σ-加法的集合関数 φ_s とに一意的に分解される．さらに，φ_c に対しては

$$\varphi_c(A)=\int_A \xi d\mu \quad (A\in\mathscr{F})$$

を満たす μ-可積分関数 ξ が存在する．この φ_c, φ_s をそれぞれ φ の **μ-絶対連続部分**，**μ-特異部分**という．ξ を φ_c の μ に関する Radon-Nikodym **導関数**または**密度関数**といい，ξ を $d\varphi_c/d\mu$ で表す場合がある．

証明　Lebesgue 分解の一意性を先に証明しよう．

いま，φ が μ-絶対連続な $\varphi_c, \varphi_{c'}$ と μ-特異な $\varphi_s, \varphi_{s'}$ によって，2通りに分解 $\varphi=\varphi_c+\varphi_s=\varphi_{c'}+\varphi_{s'}$ されたとする．このとき，$\psi=\varphi_c-\varphi_{c'}=\varphi_{s'}-\varphi'_s$ によって定義される ψ は注意 20·16（1）により，$\mathscr{F}$ の上の μ-絶対連続かつ μ-特異な σ-加法的集合関数である．注意 20·16（2）により，$\psi(A)=0$ ($A\in\mathscr{F}$) であるから，$\varphi_c=\varphi_{c'}$，$\varphi_s=\varphi_{s'}$．これで分解の一意性は示された．

φ を $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$ のように Jordan 分解して，定理を証明すればよいから，はじめから φ は有限測度であると仮定しよう．

まず

$$F=\left\{\xi:\int_A \xi d\mu\leqq\varphi(A)\ (A\in\mathscr{F}),\ \xi\geqq 0\right\}$$

を定義する．$\xi=0$ なる ξ は F に属するから，$F\neq\phi$.

$$a=\sup\left\{\int_X \xi d\mu:\xi\in F\right\}$$

とおくと，$a\leqq\varphi(X)<\infty$. ここで $\lim_i\int_X \xi_i d\mu=a$ なる $\xi_1,\xi_2,\cdots\in F$ を選び

$$\xi=\sup\{\xi_i:i\geqq 1\}$$

とおく．ξ は可積分であって，$\xi\in F$, $\int_X \xi d\mu=a$ が成り立つことを示そう．

$$\eta_n=\sup\{\xi_i:1\leqq i\leqq n\}$$

とおくと，$\eta_n\geqq 0$, $\eta_n\nearrow\xi$. さらに

$$A_{n,i}=\left\{x\in X:\xi_1(x)<\eta_n(x),\cdots,\ \xi_{i-1}(x)<\eta_n(x),\ \xi_i(x)=\eta_n(x)\right\}$$

とおくと，$A_{n,1},\cdots,A_{n,n}\in\mathscr{F}$ で，それらは互いに共通部分がなく

$$\bigcup_{i=1}^n A_{n,i}=X.$$

よって任意の $A\in\mathscr{F}$ に対し

$$\int_A\eta_n d\mu=\sum_{i=1}^n\int_{A\cap A_{n,i}}\eta_n d\mu=\sum_{i=1}^n\int_{A\cap A_{n,i}}\xi_i d\mu\leqq\sum_{i=1}^n\varphi(A\cap A_{n,i})=\varphi(A)$$

となるから，定理 20·2 により

$$\int_A\xi d\mu=\lim_n\int_A\eta_n d\mu\leqq\varphi(A).$$

よって $\xi\in F$. ゆえに $\int_X\xi d\mu\leqq a$ となるから ξ は可積分である．さらに

$$a=\lim_n\int_X\xi_n d\mu\leqq\lim_n\int_X\eta_n d\mu=\int_X\xi d\mu$$

である．だから $\int_X\xi d\mu=a$ である．

次に

$$\varphi_c(A)=\int_A\xi d\mu,\quad \varphi_s(A)=\varphi(A)-\varphi_c(A)\quad (A\in\mathscr{F})$$

とおくと，$\xi\geqq 0$ であり ξ は可積分であるから，φ_c は μ-絶対連続な σ-加法的集合関数（実は有限測度）である．よって，φ_s は μ-特異であることを示せば定理

の証明は完了する.

$\xi \in \boldsymbol{F}$ より，$\varphi_s(A)=\varphi(A)-\int_A \xi d\mu \geqq 0$ $(A \in \mathscr{F})$. よって φ_s は有限測度である.

$$\varphi_n=\varphi_s-\frac{1}{n}\mu \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと，φ_n は σ-加法的集合関数であるから，Hahn 分解（注意 20.16）により，$D_n \in \mathscr{F}$ が存在して

$$\varphi_n(A \cap D_n) \geqq 0,\ \varphi_n(A \cap D_n{}^c) \leqq 0 \quad (A \in \mathscr{F}).$$

ここで $N=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ とおくと，任意の $A \in \mathscr{F}$ に対し

$$\begin{aligned}0 \leqq \varphi_s(A \cap N^c) \leqq \varphi_s(A \cap D_n{}^c) &= \varphi_n(A \cap D_n{}^c)+\frac{1}{n}\mu(A \cap D_n{}^c)\\ &\leqq \frac{1}{n}\mu(A \cap D_n{}^c) \leqq \frac{1}{n}\mu(X) \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

であるから，$\varphi_s(A \cap N^c)=0$. よって

$$\varphi_s(A)=\varphi_s(A \cap N) \quad (A \in \mathscr{F}).$$

$\mu(N)=0$ が示されれば，φ_s は μ-特異である．ところで

$$\varphi_c(A)=\varphi(A)-\varphi_s(A)=\varphi(A)-\varphi_s(A \cap N) \leqq \varphi(A)-\varphi_s(A \cap D_n)$$

から

$$\begin{aligned}\int_A\left(\xi+\frac{1}{n}1_{D_n}\right)d\mu &= \varphi_c(A)+\frac{1}{n}\mu(A \cap D_n)\\ &\leqq \varphi(A)-\varphi_s(A \cap D_n)+\frac{1}{n}\mu(A \cap D_n)\\ &=\varphi(A)-\varphi_n(A \cap D_n)\\ &\leqq \varphi(A).\end{aligned}$$

ゆえに $\xi+\frac{1}{n}1_{D_n} \in \boldsymbol{F}$. a の定義から

$$a+\frac{1}{n}\mu(D_n)=\int_X\left(\xi+\frac{1}{n}1_{D_n}\right)d\mu \leqq a.$$

よって $\mu(D_n)=0$. ゆえに $\mu(N) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(D_n)=0$. 定理は証明された.

注意 20・16（3）と定理 20・5 から，次の定理が得られる.

定理 20·6 (Radon-Nikodym の定理) $(X, \mathscr{F}, \mu)$ を有限測度空間とする．このとき，$\mathscr{F}$ の上の σ-加法的集合関数 φ が μ-絶対連続であるための必要十分条件は

$$\varphi(A)=\int_A \xi d\mu \quad (A\in\mathscr{F})$$

を満たす μ-可積分関数 ξ が存在することである．

§21 Lebesgue 測度の構成とその性質

k 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^k$，または k 次元トーラス T^k の上の同相写像の力学的性質を調べるために，長さ，面積，体積の概念の直接的一般化である Lebesgue 測度を構成しよう．

X を1つの集合とし，$\mathscr{F}_0$ を X における集合体とする．$\mathscr{F}_0$ の上の集合関数 μ_0 が次の (i)，(ii) を満たすとき，μ_0 を**集合体 $\mathscr{F}_0$ の上の測度**という．

(i) すべての $A\in\mathscr{F}_0$ に対し，$0\leqslant\mu_0(A)\leqslant+\infty$，特に $\mu_0(\phi)=0$.

(ii) (σ 加法性) $A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{F}_0$，$A_i\cap A_j=\phi$ $(i\neq j)$ で $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathscr{F}_0$

を満たすとき，$\mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_0(A_i)$.

集合体 $\mathscr{F}_0$ の上の測度 μ_0 に関して，次の (iii)，(iv)，(v) が示される．

(iii) (有限加法性) $A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{F}_0$，$A_i\cap A_j=\phi\,(i\neq j)$ $\Rightarrow$ $\mu_0(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu_0(A_i)$.

(iv) (単調性) $A, B\in\mathscr{F}_0, A\subset B$ $\Rightarrow$ $\mu_0(A)\leqslant\mu_0(B)$.

(v) (劣加法性) $A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{F}_0$，$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}_0$ $\Rightarrow$ $\mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu_0(A_i)$.

次に外測度を定義しよう．集合 X の部分集合の全体からなる集合族を $\tilde{\mathscr{P}}$ で表す．$\tilde{\mathscr{P}}$ の上の集合関数 μ^* が次の (vi)，(vii)，(viii) を満たすとき，μ^* を X における **Carathéodory の外測度**または単に**外測度**という．

(vi) すべての $A\in\tilde{\mathscr{P}}$ に対し，$0\leqslant\mu^*(A)\leqslant+\infty$. 特に $\mu^*(\phi)=0$.

(vii) $A\subset B$ $\Rightarrow$ $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)$.

(viii) $A_1, A_2, \cdots \in \tilde{\mathscr{P}} \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

定理 21·1　μ_0 を集合体 $\mathscr{F}_0$ の上の測度とする．任意の $A \in \tilde{\mathscr{P}}$ に対し

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_i \mu_0(E_i) : \bigcup_i E_i \supset A,\ E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{F}_0\}$$

とおく．このとき μ^* は外測度である．

この μ^* を μ_0 から**導かれる外測度**という．

証明　μ^* の定義から外測度の条件のうち (vi), (vii) は明らかである．(viii) を証明しよう．

$A_1, A_2, \cdots \in \tilde{\mathscr{P}}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，μ^* の定義から各 A_n に対し

$$\bigcup_i E_{n,i} \supset A_n,\quad \sum_i \mu_0(E_{n,i}) \leqslant \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$$

を満たす $E_{n,i} \in \mathscr{F}_0$ が存在する．$\bigcup_{i,n} E_{n,i} \supset \bigcup_n A_n$ から

$$\mu^*(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_{i,n} \mu_0(E_{n,i}) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

ε は任意であるから

$$\mu^*(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

(viii) が示された．

定理 21·2　μ^* を X における外測度とするとき

$$\mu^*(W) \geqslant \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \cap A^c) \quad (W \in \tilde{\mathscr{P}})$$

を満たす $A \in \tilde{\mathscr{P}}$ を **μ^*-可測集合**といい，μ^*-可測集合の全体を $\mathscr{F}^*$ で表す．このとき $\mathscr{F}^*$ は σ-集合体である．

証明　まず $\mathscr{F}^*$ が集合体であることを証明しよう．

明らかに $X \in \mathscr{F}^*$ であり，$A \in \mathscr{F}^*$ ならば $A^c \in \mathscr{F}^*$ である．また $A, B \in \mathscr{F}^*$ ならば

$$\begin{aligned}\mu^*(W) &\geqslant \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \cap A^c) \\ &\geqslant \mu^*((W \cap A) \cap B) + \mu^*((W \cap A) \cap B^c) + \mu^*(W \cap A^c) \\ &\geqslant \mu^*(W \cap (A \cap B)) + \mu^*((W \cap A \cap B^c) \cup (W \cap A^c)) \\ &= \mu^*(W \cap (A \cap B)) + \mu^*(W \cap (A \cap B)^c)\end{aligned}$$

であるから，$A \cap B \in \mathscr{F}^*$．よって $\mathscr{F}^*$ は集合体である．

次に，$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}^*$ に対し，$A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$ ならば，任意の $m>0$ に対し

$$\mu^*(W) \geqq \sum_{i=1}^{m} \mu^*(W \cap A_i) + \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{m} A_i)^c)$$

が成り立つことを示そう．

m についての数学的帰納法を使う．$A_1 \in \mathscr{F}^*$ から，$m=1$ のときは明らかである．$m=n$ のとき成り立つと仮定する．$A_{n+1} \in \mathscr{F}^*$ から

$$\begin{aligned}\mu^*(W) &\geqq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(W \cap A_i) + \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c) \\ &\geqq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(W \cap A_i) + \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c \cap A_{n+1}) \\ &\quad + \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c \cap A_{n+1}{}^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(W \cap A_i) + \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)^c). \\ &\geqq \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)) + \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)^c)\end{aligned}$$

よって $m=n+1$ のときも成り立つ．ここで $m \to \infty$ としたとき

$$(21\cdot1) \quad \mu^*(W) \geqq \mu^*(W \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu^*(W \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c)$$

を得る．実際に，$(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)^c \supset (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$ より明らかである．

$\mathscr{F}^*$ が σ-集合体であることを結論するために

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}^*$$

を示すだけである．実際に

$$B_1 = A_1, \quad B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \quad (i=2, 3, \cdots)$$

とおくと $B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{F}^*$，$B_i \cap B_j = \phi$ $(i \neq j)$ である．さらに $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ であるから，(21·1) より $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}^*$ である．

最後に，μ^* が $\mathscr{F}^*$ の上の測度であることを示そう．そのためには

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}^*,\ A_i \cap A_j = \phi\ (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

を証明すればよい．(21·1) において，$W = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とおくと

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap A_j) + \mu^*((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

逆向きの不等式は (viii) によって成り立つから，μ^* は $\mathscr{F}^*$ の上の測度である．

$(X, \mathscr{F}, \mu)$ は測度空間とする（必ずしも μ は有限測度とはかぎらない)，いまから測度の完備性を定義しよう．測度が0の集合を零集合という．零集合の部分集合がすべて可測集合であるとき，すなわち

$$A \subset N, N \in \mathscr{F}, \mu(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \in \mathscr{F}$$

が成り立つとき，μ を**完備測度**，$\mathscr{F}$ を μ-**完備** σ-**集合体**という．

注意 21·1　μ^* は $\mathscr{F}^*$ の上の完備測度である．

証明　$A \subset N$，$N \in \mathscr{F}^*$，$\mu^*(N) = 0$ ならば，$A \in \mathscr{F}^*$ を示せばよい．任意の $W \in \tilde{\mathscr{P}}$ に対して，$W \cap A \subset N$であるから，$\mu^*(W \cap A) = 0$．よって

$$\mu^*(W) \geqslant \mu^*(W \cap A^c) = \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \cap A^c)$$

となるから，$A \in \mathscr{F}^*$ である．

集合体 $\mathscr{F}_0$ の上の測度 μ_0 が次を満たすとき，μ_0 を σ-**有限測度**という．

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X,\ X_i \in \mathscr{F}_0,\ \mu_0(X_i) < \infty$$

を満たす部分集合列 X_i が存在する．

定理 21·3　(Hopf-Kolmogorov の拡張定理)　μ_0 を集合体 $\mathscr{F}_0$ の上の σ-有限測度とし，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{F}_0$ の生成する σ-集合体とする．このとき $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^*$ で

$$\mu(A) = \mu_0(A) \quad (A \in \mathscr{F}_0)$$

を満たす $\mathscr{F}$ の上の測度 μ がただ1つ存在する．ここに $\mathscr{F}^*$ は μ_0 から導かれ

る外測度 μ^* に関して，μ^*-可測集合のなす σ-集合体を表す．

証明 最初に

$$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}^*$$

を証明しよう．$A \in \mathscr{F}_0$ とする．このとき任意の部分集合 W と任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$W \subset \bigcup_i E_i, \quad \mu^*(W) + \varepsilon \geqslant \sum_i \mu_0(E_i)$$

を満たす $E_i \in \mathscr{F}_0$ が存在する．ところで

$$\bigcup_i (E_i \cap A) \supset W \cap A, \quad \bigcup_i (E_i \cap A^c) \supset W \cap A^c,$$

$$E_i \cap A, \quad E_i \cap A^c \in \mathscr{F}_0$$

であるから

$$\sum_i \mu_0(E_i) = \sum_i \mu_0(\Sigma_i \cap A) + \sum_i \mu_0(E_i \cap A^c)$$
$$\geqslant \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \cap A^c).$$

よって

$$\mu^*(W) + \varepsilon \geqslant \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \cap A^c).$$

ε は任意であるから

$$\mu^*(W) \geqslant \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \cap A^c).$$

したがって $A \in \mathscr{F}^*$ である．ゆえに $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}^*$ が示された．よって $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^*$ である．

次に

$$\mu^*(A) = \mu_0(A) \quad (A \in \mathscr{F}_0)$$

を証明する．$A \in \mathscr{F}_0$ とする．μ^* の定義から $\mu^*(A) \leqslant \mu_0(A)$ である．よって $\mu^*(A) \geqslant \mu_0(A)$ を示せばよい．そのために

$$\mu^{**}(A) = \inf \{ \sum_i \mu_0(E_i) : \bigcup_i E_i \supset A, E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{F}_0$$
$$E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j, 1 \leqslant i, j < \infty) \}$$

とおく（$\mu^*(A)$ の定義と比較せよ），明らかに $\mu^*(A) \leqslant \mu^{**}(A)$ である．逆向きの不等式を示そう．いま $\bigcup_i E_i \supset A$, $E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{F}_0$ とするとき，$E_1' = E_1$, $E_i' = E_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k$ $(i=2, 3, \cdots)$ とおけば，$E_1', E_2', \cdots \in \mathscr{F}_0$ で $E_i' \cap E_j' = \phi$ $(i \neq j)$，さらに $\bigcup_i E_i' = \bigcup_i E_i \supset A$ である．よって

$$\sum_i \mu_0(E_i) \geqq \sum_i \mu_0(E_i') \geqq \mu^{**}(A).$$

$E_1, E_2, \cdots$ のすべてのとり方に関して $\sum_i \mu_0(E_i)$ の下限をとれば，$\mu^*(A) \geqq \mu^{**}(A)$ が求まる．よって $\mu^*(A) = \mu^{**}(A)$ $(A \in \mathscr{F}_0)$ である．

ゆえに任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\bigcup_i E_i \supset A, \quad \mu^*(A) + \varepsilon \geqq \sum_i \mu_0(E_i)$$

を満たす互いに共通部分をもたない $E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{F}_0$ が存在する．

$$E_1 \cap A, E_2 \cap A, \cdots \in \mathscr{F}_0, \ \bigcup_i (E_i \cap A) = A,$$

$$(E_i \cap A) \cap (E_j \cap A) = \phi \quad (i \neq j)$$

であるから

$$\sum_i \mu_0(E_i) \geqq \sum_i \mu_0(E_i \cap A) = \mu_0(A).$$

よって

$$\mu^*(A) + \varepsilon \geqq \mu_0(A).$$

ε は任意であるから

$$\mu^*(A) \geqq \mu_0(A)$$

である．

μ^* の $\mathscr{F}$ への制限を μ とすれば，定理を満たす $\mathscr{F}$ の上の測度 μ の存在が示されたことになる．

最後に，このような μ がただ1つであることを示そう．そのために μ を定理の条件を満たす $\mathscr{F}$ の上の任意の測度とするとき，$\mathscr{F}$ の上で $\mu = \mu^*$ を示せばよい．まず

$$\mu(A) \leqq \mu^*(A) \qquad (A \in \mathscr{F})$$

を示そう．$A \in \mathscr{F}$ とする．$\bigcup_i E_i \supset A$ なる $E_1, E_2, \cdots \in \mathscr{F}_0$ に対し

$$\mu(A) \leqq \sum_i \mu(E_i) = \sum_i \mu_0(E_i)$$

である．よって $\mu(A) \leqq \mu^*(A)$ が求まる．

次に

$$\mu(A) \geqq \mu^*(A) \qquad (A \in \mathscr{F})$$

を示そう．$A \in \mathscr{F}$ とする．μ_0 は σ-有限測度であるから，$X_n \nearrow X, X_n \in \mathscr{F}_0$，$\mu_0(X_n) < \infty$ なる集合列 X_n が存在する．よって

$$\mu(X_n\cap A^c)\leqslant\mu(X_n)=\mu_0(X_n)<\infty,$$

$$\mu^*(X_n\cap A^c)\leqslant\mu^*(X_n)=\mu(X_n)=\mu_0(X_n)<\infty.$$

また，$X_n\cap A^c\in\mathscr{F}$ であるから

$$\mu(X_n\cap A^c)\leqslant\mu^*(X_n\cap A^c).$$

よって

$$\mu(X_n\cap A)=\mu(X_n)-\mu(X_n\cap A^c)\geqslant\mu^*(X_n)-\mu^*(X_n\cap A^c)$$
$$=\mu^*(X_n\cap A)$$

である．ここで $n\to\infty$ とすれば，$\mu(A)\geqslant\mu^*(A)$ である．

Lebesgue 測度を構成するために，次の定理を準備しよう．

k 次元右開区間 $J=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_k,b_k)$ $(a_i,b_i\in\boldsymbol{R},1\leqslant i\leqslant k)$ の全体からなる集合族を $\mathscr{I}^k$ で表す．有限個の右開区間の和集合を k 次元**基本図形**という．このような基本図形の全体からなる集合族を $\mathcal{E}^k$ で表す．

定理 21・4 次が成り立つ．

（1） 基本図形は互いに共通部分をもたない有限個の右開区間の和集合として表される．

（2） $\mathcal{E}^k$ は集合体である．

（3） Borel クラス $\mathscr{B}^k$ は $\mathscr{I}^k$ の生成する σ-集合体である．

（4） $\mathscr{B}^k$ は $\mathcal{E}^k$ の生成する σ-集合体である．

証明 （1）は明らかである．複雑さをさけるために1次元の場合について（2),（3),（4）を証明する．

（2）の証明；$\boldsymbol{R}^1\in\mathcal{E}^1$ は明らかである．

$$J=[a,b)\ \Rightarrow\ J^c=(-\infty,a)\cup[b,+\infty)\in\mathcal{E}^1.$$

$$E=\bigcup_{i=1}^m J_i,\ E'=\bigcup_{j=1}^n J_j'\ \Rightarrow\ E\cap E'=\bigcup_{i,j}(J_i\cap J_j')\in\mathcal{E}^1.$$

よって

$$E=\bigcup_{i=1}^n J_i\in\mathcal{E}^1\ \Rightarrow\ E^c=\bigcap_{i=1}^n J_i^c\in\mathcal{E}^1.$$

ゆえに $\mathcal{E}^1$ は集合体である．

（3）と（4）の証明；$\mathscr{I}^1$ と $\mathcal{E}^1$ の生成する σ-集合体をそれぞれ $\mathscr{F}(\mathscr{I}^1)$ と

$\mathscr{F}(\mathscr{E}^1)$ で表す．任意の $[a,b)\in\mathscr{I}^1$ は

$$[a,b)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-1/n,b)$$

と表され，$(a-1/n,b)$ は開区間である．だから $[a,b)\in\mathscr{B}^1$ である．ゆえに $\mathscr{I}^1\subset\mathscr{B}^1$．したがって $\mathscr{E}^1\subset\mathscr{B}^1$ である．ゆえに

$$\mathscr{F}(\mathscr{I}^1)\subset\mathscr{F}(\mathscr{E}^1)\subset\mathscr{B}^1.$$

次に G を任意の開集合とすると，右開区間 $[i/n,(i+1)/n)$ $(i=0,\pm1,\pm2\cdots)$ のうちで G に含まれるもの全体の和集合が，G になっているから，$G\in\mathscr{F}(\mathscr{E}^1)$ である．よって

$$\mathscr{B}^1\subset\mathscr{F}(\mathscr{I}^1)\subset\mathscr{F}(\mathscr{E}^1).$$

ゆえに $\mathscr{F}(\mathscr{I}^1)=\mathscr{F}(\mathscr{E}^1)=\mathscr{B}^1$ である．

k 次元右開区間 $J=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_k,b_k)\in\mathscr{I}^k$ に対し

$$|J|=(b_1-a_1)\cdots(b_k-a_k)$$

と定義する．k 次元基本図形 $E=\bigcup_i J_i\in\mathscr{E}^k$ ($J_1,\cdots,J_k$ は互いに共通部分をもたない) に対し

$$\mu_0(E)=\sum_{i=1}^{n}|J_i|$$

と定義する．この $\mu_0(E)$ の値は E を互いに共通部分をもたない有限個の右開区間の和集合として表す表し方に依存しない．何故ならば

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}J_i=\bigcup_{j=1}^{m}J_j' \quad (J_1',\cdots,J_m' \text{ は互いに共通部分をもたない})$$

とする．このとき

$$\sum_i|J_i|=\sum_i\sum_j|J_i\cap J_j'|=\sum_j|J_j'|$$

が成り立つことからわかる．

定理 21・5　μ_0 は $\mathscr{E}^k$ の上の σ-有限測度である．

証明　μ_0 が $\mathscr{E}^k$ の上の測度であることを示すには，$0\leqslant\mu_0(A)\leqslant+\infty$ $(A\in\mathscr{E}^k)$,

$\mu_0(\phi)=0$ は明らかであるから

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{E}^k,\ A_i \cap A_j = \phi \quad (i \neq j),\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}^k$$

$$\Rightarrow \ \mu_0(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$$

を証明すればよい．$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とおく．任意の $n \geqq 1$ に対して

$$\mu_0(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i)$$

が成り立つことは μ_0 の定義からわかる．だから

$$\mu_0(A) \geqq \mu_0(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0(A_i).$$

ここで $n\to\infty$ とすれば

$$\mu_0(A) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i).$$

よって

$$\mu_0(A) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i)$$

を示せばよい．

最初に A が有界集合である場合を扱う．任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$F \in \mathcal{E}^k,\ \bar{F} \subset A\ (\bar{F} \text{ は } F \text{ の閉包}),$$
$$\mu_0(A) \leqq \mu_0(F) + \varepsilon,$$
$$G_j \in \mathcal{E}^k,\ G_j^0 \supset A_j\ (G^0 \text{ は } G \text{ の内部}),$$
$$\mu_0(G_j) \leqq \mu_0(A_j) + \varepsilon/2^j \quad (j=1, 2, \cdots)$$

を満たす F, G_j が存在する．$\bar{F}$ はコンパクトで

$$\bar{F} \subset A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j^0$$

から，$\bar{F}$ は適当な有限個の G_j^0 で被覆される．よって

$$F \subset \bar{F} \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j^0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j$$

ゆえに

$$\mu_0(A)\leqslant\mu_0(F)+\varepsilon\leqslant\mu_0(\bigcup_{j=1}^{n}G_j)+\varepsilon$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\mu_0(G_j)+\varepsilon\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j)+2\varepsilon$$

ε は任意であるから

$$\mu_0(A)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j).$$

次に A が有界集合でない場合に，各 n に対し k 次元右開区間

$$I_n=[-n,n)\times\cdots\times[-n,n)$$

を考える．このとき $A\cap I_n$ は有界集合で，$\bigcup_j(A_j\cap I_n)=A\cap I_n\in\mathcal{E}^k$ である．だから先に述べたように

$$\mu_0(A\cap I_n)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j\cap I_n)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j).$$

よって

$$\mu_0(A)=\lim_n\mu_0(A\cap I_n)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(A_j).$$

(最初の等式は注意 20・2 を使えば求まる)．μ_0 が $\mathcal{E}^k$ の上の測度であることが証明された．

$$I_n\nearrow \boldsymbol{R}^k,\quad I_n\in\mathcal{E}^k,\quad \mu_0(I_n)=(2n)^k<\infty$$

であるから，μ_0 は σ-有限測度である．

今から Lebesgue 測度を定義しよう．μ_0 は $\mathcal{E}^k$ の上の測度であるから，μ_0 から導かれる外測度を μ^* で表し，**k 次元 Lebesgue 外測度**という．μ^*-可測集合を **k 次元 Lebesgue 可測集合**という．このような可測集合の全体を $\mathcal{M}^k$ で表し，**k 次元 Lebesgue クラス**という．外測度 μ^* を $\mathcal{M}^k$ へ制限した測度を μ で表し，これを **k 次元 Lebesgue 測度**という．$(\boldsymbol{R}^k,\mathcal{M}^k,\mu)$ を **Lebesgue 測度空間**という．

注意 21・2　Borel 集合は Lebesgue 可測集合である．したがって開集合，閉集合，可算集合は Lebesgue 可測集合である．

証明　μ_0 は集合体 $\mathcal{E}^k$ の上の σ-有限測度であり，Borel クラス $\mathcal{B}^k$ は $\mathcal{E}^k$ の

生成する σ-集合体であるから，Hopf-Kolmogorov の拡張定理によって，$\mathscr{B}^k\subset\mathscr{M}^k$ である．

注意 21·3 Lebesgue 測度 μ は σ-有限測度である．

証明 μ_0 は $\mathcal{E}^k$ の上の σ-有限測度であるから，$I_n\nearrow\boldsymbol{R}^k$, $I_n\in\mathcal{E}^k$, $\mu_0(I_n)<\infty$ を満たす $I_1, I_2, \cdots$ が存在する．Hopf-Kolmogorov の拡張定理によって，$\mu(I_n)=\mu_0(I_n)$ であるから，μ は σ-有限測度である．

注意 21·4 A を Lebesgue 可測集合とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$F\subset A\subset G,\quad \mu(G\setminus F)<\varepsilon$$

を満たす閉集合 F と開集合 G が存在する．この性質を Lebesgue 測度 μ の**正則性**という．

証明は μ が σ-有限測度であることに注意して，§23 の定理 23·1 の証明と同様な方法でできるので，ここではその証明を与えない（正則性はより一般の場合にも成り立つ（定理 23·1 を参照））

$\boldsymbol{R}^k$ の部分集合 A と $\boldsymbol{R}^k$ の点 x に対し

$$A\pm x=\{y\pm x:\ y\in A\}\quad(\text{複合同順})$$

と定義する（ここに $x\pm y=(x_1\pm y_1, \cdots, x_k\pm y_k)$（複号同順）である）．

定理 21·6 A が Lebesgue 可測集合ならば，$A\pm x$ もそうであり

$$\mu(A)=\mu(A\pm x)$$

が成り立つ．

証明 μ_0 の定義から，$E\in\mathcal{E}^k, x\in\boldsymbol{R}^k$ に対し，$E\pm x\in\mathcal{E}^k, \mu_0(E\pm x)=\mu_0(E)$ である．Lebesgue 外測度 μ^* の定義から，すべての部分集合 B に対し

$$\mu^*(B\pm x)=\mu^*(B)$$

を得る．よって Lebesgue 可測集合 A に対し，すべての部分集合 $W\subset\boldsymbol{R}^k$ で

$$\begin{aligned}\mu^*(W)=\mu^*(W\pm x)&\geqq\mu^*((W\pm x)\cap A)+\mu^*((W\pm x)\cap A^c)\\&=\mu^*(W\cap(A\mp x))+\mu^*(W\cap(A\mp x)^c)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $A\pm x$ は Lebesgue 可測であり

$$\mu(A\pm x)=\mu^*(A\pm x)=\mu^*(A)=\mu(A)$$

である．

1を法とした区間 $T=[0,1)$ は加法に関して群であって，コンパクト位相群でもある．このような区間 T の k 個の直積位相空間を $\tilde{T}^k$ で表す．$\tilde{T}^k$ はコンパクトである．$\tilde{T}^k$ は T の群演算から自然に導入された演算によって，位相群となる．

k 次元トーラス $T^k(=\boldsymbol{R}^k/\boldsymbol{Z}^k)$ と $\tilde{T}^k$ との間に

$$f(x+\boldsymbol{Z}^k)=x \quad (x\in\tilde{T}^k)$$

によって，同相写像 $f: T^k\to\tilde{T}^k$ が定義される．f は次の性質をもっている．

$$f(x+y+\boldsymbol{Z}^k)=f(x+\boldsymbol{Z}^k)+f(y+\boldsymbol{Z}^k) \qquad (x, y\in\tilde{T}^k).$$

$\boldsymbol{R}^k$ の上の Lebesgue 測度 μ は $\tilde{T}^k$ の上の Borel クラスの上に制限することができる．それを ν で表し，**$\tilde{T}^k$ の上の Lebesgue 測度**であるという．明らかに $\nu(\tilde{T}^k)=1$, $\tilde{T}^k$ の任意の空でない開集合 U に対し $\nu(U)>0$ である．さらに $\tilde{T}^k$ の Borel 集合 E に対し，$\nu(E+x)=\nu(E)\ (x\in\tilde{T}^k)$ が成り立つ．この ν から T^k の上に

$$\mu'(B)=\nu(fB) \quad (\text{Borel 集合 } B\subset T^k)$$

によって Borel 確率測度が定義される．μ' は T^k の上で，上で述べた性質を満たしている．この μ' を T^k の上の **Lebesgue 確率測度**(または **Haar 確率測度**)であるという．

第8章　エルゴード性

この章ではエルゴード理論の基礎を解説する．§22 では，確率空間の保測写像に関する Poincaré の回帰定理と Birkhoff のエルゴード定理を証明する．§23 では，コンパクト距離空間の上の Borel 確率測度の正則性を示し，Borel 確率測度の基本的性質を調べる．また，連続関数全体の作る Banach 空間から $\boldsymbol{R}$ への連続線形写像と Borel 確率測度との関係を調べる．§24 では，コンパクト距離空間の上の Borel 確率測度全体の作る空間がコンパクト距離空間であることを示し，その上の任意の同相写像に対して，不変な Borel 確率測度が存在するという Krylov-Bogolioubov の定理を証明する．また，コンパクト距離空間 X の上の同相写像 $f: X \to X$ に対してエルゴード的な確率測度は，それが f-不変な Borel 確率測度全体の作る空間 $\mathcal{M}_f(X)$ の中で端点となることとして特徴づけられることを証明する．また，f が明記性をもつとき，その周期点によって構成されるエルゴード的な f-不変 Borel 確率測度全体の集合 $E(f)$ は $\mathcal{M}_f(X)$ の中で稠密であることを証明する．

§25 では，コンパクト距離空間の上の同相写像が一意エルゴード的であるための必要十分条件を求める．また，同相写像がその非遊走集合 Ω の上で擬軌道追跡性をもてば，Ω の空でない開集合で正の値をもつ f-不変な Borel 確率測度が存在することを示す．§26 では，連結で少なくとも 2 点を含むコンパクト距離空間の上の同相写像は，ディスタルなら擬軌道追跡性を満たさないことを示す．また，極小的の場合も擬軌道追跡性をもたない．

§22　エルゴード定理

$(X, \mathscr{F}, \mu)$ は確率空間とする．写像 $f: X \to X$ がすべての $A \in \mathscr{F}$ に対し $f^{-1}(A) \in \mathscr{F}$ を満たすとき，f を **$\mathscr{F}$-可測**という．f を $\mathscr{F}$-可測で，$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ $(A \in \mathscr{F})$ を満たすとき，f を**保測写像**といい，μ を **f-不変（確率）測度**であるという．

定理 22・1（Poincaré の回帰定理）　f は確率空間 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ の上の保測写像とする．このとき $\mu(E) > 0$ を満たす任意の $\mathscr{F}$-可測集合 E に対し，μ-測度 0 の集合 E_1 を除いた集合 $E \setminus E_1$ の各点 x は $f^{n_i}(x) \in E$ となるように自然数 $n_1 < n_2 < \cdots$ がみつかる．

この定理は次のように解釈することができるであろう．いま，有限な器の中に有限個の分子が入っていて，それらの分子の速度は無限大になることができない場合に，各分子の位置，速度がある状態 p_0 から出発するとしよう．このとき，各分子はいろいろな状態をつぎつぎに通るが，十分時間がたつと，必ず p_0 の任意の近くの状態にもどってくる．このことを述べているのが，回帰定理である．

定理 22·1 の証明　任意の $N>0$ に対し

$$E_N=\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(E)$$

とおく．明らかに $f^{-1}(E_N)=E_{N+1}$ が成り立ち

$$E_N\subset E_{N-1}\subset\cdots\subset E_0$$

である．f は保測であるから

$$\mu(E_{N+1})=\mu(f^{-1}(E_N))=\mu(E_N).$$

ゆえに任意の $N>0$ に対し，$\mu(E_N)=\mu(E_0)$．さらに

$$\mu(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N)=\mu(E_0)$$

である．ところで集合 $\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} f^{-n}(E)$ は f の正のベキ乗で無限回 E にもどってくるすべての点の集合を示している．

$$F=E\cap(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N)$$

とおくと，$\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N\subset E_0$ かつ $\mu(\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N)=\mu(E_0)$ より

$$\mu(F)=\mu(E\cap E_0)=\mu(E)$$

である．よって，測度 0 の集合 $E\setminus F$ を除いて E の各点は f の正ベキ乗で無限回 E にもどってくる．

次にエルゴード定理を述べよう．その前に 1 つの体系についての力学的量を考えてみよう．例えば，この体系が器の壁に作用する力を考える．体系の力学的状態を表す代表点が時間の経過に従って動いていくうちに，この力は変わってゆくであろう．しかし，その時間的平均をとると圧力という力学的量（物理量）を与える．力学的量を A とすれば

$$(A\text{の観測量})=(A\text{の時間的経過を考え合わせたときの時間平均})$$

である．しかし，非常に多数の分子の力学的行動をたどることも，また初期値を正確に与えることも不可能である．そこで，与えられた体系と同じ構造の体系を考え，その状態が相空間内に分布していると考えるのが便利であることが多い．つまり，与えられた体系のコピーを多数考えるのである．このとき，いろいろな力学的状態が一様に実現されていると考えるならば，与えられた体系を1つ考え，その力学的状態の時間的経過を調べるとき，力学的量の時間平均と多数考えたコピーの状態の平均とが等しい．このことを数学の立場で表しているのがエルゴード定理，特に注意22·1の意味である．

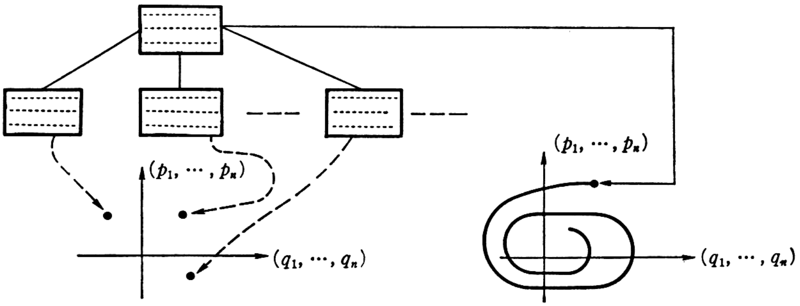


図 8·1

定理 22·2 (Birkhoff のエルゴード定理)　確率空間$(X, \mathscr{F}, \mu)$の上の保測写像fが与えられているとする．このとき，任意の$\xi \in L_1(\mu)=\{\xi : \int_X |\xi| d\mu < \infty\}$に対し，$\xi^* \in L_1(\mu)$が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)=\xi^*(x) \quad \mu\text{-}a.e.$$

$$\xi^*\circ f=\xi^* \ \ \mu\text{-}a.e. \quad \text{かつ} \quad \int_X \xi^* d\mu=\int_X \xi d\mu$$

が成り立つ．

μは確率測度とする．$\mathscr{F}$-可測な写像fが**エルゴード的**であるとは，可測集合Eが$f^{-1}(E)=E$を満たせば$\mu(E)=0$または1に限るときをいう．

注意 22·1　定理22·2において，fがエルゴード的であれば，後で与えられる

注意22・3によって，ξ^* はほとんど至るところで定数である．よって，$\xi^*=\int_X \xi d\mu$ が成り立つから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)=\int_X \xi d\mu - a.e.$$

上の等式の左辺を ξ の時間平均，右辺を ξ の空間平均とよび，f がエルゴード的であれば，上式は時間平均と空間平均が等しいことを意味している．

注意 22・2 確率空間 $(X,\mathscr{F},\mu)$ の上の $\mathscr{F}$-可測写像 f に対し，次は互いに同値である．

（1） f はエルゴード的である．

（2） $\mu(f^{-1}(B)\varDelta B)=0\ (B\in\mathscr{F})$ ならば，$\mu(B)=0$ あるいは $\mu(B)=1$ である．ここに $A\varDelta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ を表す．

（3） 任意の $A,B\in\mathscr{F}$ に対し，$\mu(A)>0$, $\mu(B)>0$ ならば，$\mu(f^{-n}(A)\cap B)>0$ なる $n>0$ が存在する．

証明 （1）⇒（2）の証明：$B\in\mathscr{F}$ に対し $\mu(f^{-1}(B)\varDelta B)=0$ を仮定し

$$B_\infty=(B\cup f^{-1}(B)\cup f^{-2}(B)\cup\cdots)\cap(f^{-1}(B)\cup f^{-2}(B)\cup\cdots)\\ \cap(f^{-2}(B)\cup f^{-3}(B)\cup\cdots)\cap\cdots$$

とおく．明らかに，$f^{-1}(B_\infty)=B_\infty$ かつ $\mu(B_\infty)=\mu(B)$ である．よって（1）より $\mu(B_\infty)=0$ あるいは $\mu(B_\infty)=1$ である．すなわち，$\mu(B)=0$ あるいは $\mu(B)=1$ である．

（2）⇒（3）の証明：$A,B\in\mathscr{F}$ に対し $\mu(A)>0$, $\mu(B)>0$ とし，すべての $n>0$ に対し $\mu(f^{-n}(A)\cap B)=0$ を仮定する．$A'=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-n}(A)$ とおくと，仮定によって，$\mu(A'\cap B)=0$ である．$f^{-1}(A')\subset A'$, $\mu(A')=\mu(f^{-1}A')$ であるから，明らかに $\mu(f^{-1}A'\varDelta A')=0$ である．ゆえに（2）より $\mu(A')=0$ あるいは $\mu(A')=1$ を得る．ところで $\mu(A')\geqq\mu(A)>0$ であるから，$\mu(A')=1$ である．しかし $\mu(A'\cap B)=0$ に矛盾する．

（3）⇒（1）の証明：（1）を否定する．このとき $f^{-1}(B)=B$ かつ $0<\mu(B)<1$ を満たす $B\in\mathscr{F}$ が存在する．よって，すべての $n>0$ に対し

$$\mu(f^{-n}(B)\cap(X\setminus B))=0.$$

これは矛盾である.

注意 22·3 f は確率空間 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ の上の $\mathscr{F}$-可測写像とする. このとき次は互いに同値である.

（1） f はエルゴード的である.

（2） すべての $x \in X$ に対し $\xi(fx)=\xi(x)$ を満たす $\mathscr{F}$-可測関数 ξ は, ほとんど至るところ定数関数である.

（3） $\xi(fx)=\xi(x)$ μ-$a.e.$ を満たす $\mathscr{F}$-可測関数 ξ は, ほとんど至るところ定数関数である.

証明 （1）⇒（3）の証明: ξ は $\mathscr{F}$-可測で, $\xi(fx)=\xi(x)$ μ-$a.e.$ であると仮定する. 任意の $n>0$ に対し

$$A(k, n)=\{x \in X : k/2^n \leqq \xi(x) < (k+1)/2^n\} \quad (k \in \boldsymbol{Z})$$

とすると

$$f^{-1}(A(k, n)) \Delta A(k, n) \subset \{x \in X : \xi(fx) \neq \xi(x)\}$$

である. よって

$$\mu(f^{-1}(A(k, n)) \Delta A(k, n))=0$$

を得る. 注意 22·2（2）により

$$\mu(A(k, n))=0 \quad あるいは \quad \mu(A(k, n))=1$$

である. $n>0$ を 1 つ固定するとき

$$\bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} A(k, n)=X$$

で, $\{A(k, n) : k \in \boldsymbol{Z}\}$ の各集合は互いに共通部分をもたない. よって $\mu(A(k_n, n))=1$ なる $k_n>0$ が一意的に存在する.

$$Y=\bigcap_{n=1}^{\infty} A(k_n, n)$$

とおくと, $\mu(Y)=1$ かつ ξ は Y の上で定数であるから, $\xi(x)$ はほとんど至るところで定数関数である.

（3）⇒（2）は明らかである.

（2）⇒（1）の証明: $E \in \mathscr{F}$ が $f^{-1}(E)=E$ を満たすと仮定する. このとき定義関数 $1_E(x)$ は可測で, $1_E(fx)=1_E(x)$ であるから,（2）より $1_E(x)=$定数 μ-$a.e.$ である. ゆえに

$$\mu(E)=\int_X 1_E(x)d\mu=0 \text{ あるいは } 1$$

である．

$\xi\in L_1(\mu)$ に対し

$$(L_f\xi)(x)=\xi(fx) \quad (x\in X)$$

とおき，$\|\xi\|_1=\int_X |\xi|d\mu$ と表す．このとき f が保測であれば，$L_f: L_1(\mu)\to L_1(\mu)$ は $\|L_f\xi\|_1=\|\xi\|_1$ $(\xi\in L_1(\mu))$ を満たす．

定理22·2 の証明に次の 2 つの補題を必要とする．

補題 22·1 (最大エルゴード定理)．f は保測写像とする．簡単のために $L_f=L$ と書くことにする．自然数 N と $\xi\in L_1(\mu)$ に対し，$\xi_n=\sum_{i=0}^{n-1}L^i(\xi)(1\leqslant n\leqslant N)$ とおき，特に $\xi_0=0$ とする．このとき

$$F_N=\max\{\xi_n: 0\leqslant n\leqslant N\}\geqslant 0 \quad\Rightarrow\quad \int_{\{x:F_N(x)>0\}}\xi d\mu\geqslant 0$$

が成り立つ．

証明 明らかに $F_N\in L_1(\mu)$ である．$0\leqslant n\leqslant N$ なる n に対し，$F_N\geqslant\xi_n$ であるから，$L(F_N)\geqslant L(\xi)$ が成り立つ．$L(F_N)+\xi\geqslant\xi_{n+1}$ から

$$(LF_N)(x)+\xi(x)\geqslant\max\{\xi_n(x): 1\leqslant n\leqslant N\}.$$

$F_N(x)>0$ のとき，上の式の右辺は

$$\text{右辺}=\max\{\xi_n(x): 0\leqslant n\leqslant N\}=F_N(x)$$

である．よって，$A=\{x\in X: F_N(x)>0\}$ の上で $\xi\geqslant F_N-L(F_N)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_A\xi d\mu &\geqslant\int_A F_N d\mu-\int_A L(F_N)d\mu\\ &=\int_X F_N d\mu-\int_A L(F_N)d\mu \quad (X\setminus A \text{ の上で } F_N=0 \text{ であるから})\\ &\geqslant\int_X F_N d\mu-\int_X L(F_N)d\mu\\ &=0 \qquad\qquad (\|L(\eta)\|_1=\|\eta\|_1 \text{ であるから})\end{aligned}$$

が求まる．

補題 22·2 f は保測写像とする．$\eta\in L_1(\mu)$ に対し

$$B_\alpha=\left\{x\in X:\sup_{n\geqq 1}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\eta(f^m x)>\alpha\right\}$$

とおくと，$f^{-1}(A)=A$ なる $\mathscr{F}$-可測集合 A に対し

$$\int_{B_\alpha\cap A}\eta d\mu\geqq\alpha\mu(B_\alpha\cap A)$$

が成り立つ．

証明 $\xi=\eta-\alpha$，$F_N=\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\xi(f^m x):1\leqq n\leqq N\right\}$ とおくと

$$B_\alpha=\bigcup_{N=1}^{\infty}\{x\in X:F_N(x)>0\}$$

であるから，補題 22·1 より

$$\int_{B_\alpha}\eta d\mu\geqq\alpha\mu(B_\alpha)$$

である．f の A への制限 $f_{|A}$ に対して

$$\int_{B_\alpha\cap A}\eta d\mu\geqq\alpha\mu(B_\alpha\cap A)$$

が成り立つ．

定理 22·2 の証明：$\xi\in L_1(\mu)$ に対し

$$\xi^*(x)=\varlimsup_n\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x),\quad \xi_*(x)=\varliminf_n\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)$$

とおくと，$\xi^*\circ f=\xi^*$ かつ $\xi_*\circ f=\xi_*$ が成り立つ．実際に，$a_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)$

とおくと，$\left(\frac{n+1}{n}\right)a_{n+1}(x)-a_n(fx)=\xi(x)/n$ からわかる．

実数 $\beta<\alpha$ に対し

$$E_{\alpha,\beta}=\{x\in X:\xi_*(x)<\beta,\ \alpha<\xi^*(x)\}$$

は f-不変集合（$f^{-1}(E_{\alpha,\beta})=E_{\alpha,\beta}$）である．このとき

$$B_\alpha=\left\{x\in X:\sup_{n\geqq 1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)>\alpha\right\}$$

に対し

$$E_{\alpha,\beta}\subset B_\alpha$$

から，補題22·2によって

$$\int_{E\alpha,\beta}\xi d\mu=\int_{E\alpha,\beta\cap B\alpha}\xi d\mu\geqslant\alpha\mu(E_{\alpha,\beta}\cap B_\alpha)=\alpha\mu(E_{\alpha,\beta})$$

が求まる．関数 ξ の代わりに $-\xi$，実数 α,β の代わりに $-\alpha,-\beta$ をそれぞれおきかえると，$(-\xi)^*=-\xi_*$，$(-\xi)_*=-\xi^*$ である．よって

$$\int_{E\alpha,\beta}\xi d\mu\leqslant\beta\mu(E_{\alpha,\beta})$$

が求まる．ゆえに

$$\alpha\mu(E_{\alpha,\beta})\leqslant\int_{E\alpha,\beta}\xi d\mu\leqslant\beta\mu(E_{\alpha,\beta})$$

である．しかし，$\alpha>\beta$ より $\mu(E_{\alpha,\beta})=0$ である．ところで

$$\{x\in X:\xi_*(x)<\xi^*(x)\}\subset\cup\{E_{\alpha,\beta}:\alpha>\beta,\alpha,\beta:\text{有理数}\}$$

であるから，$\mu(\{x\in X:\xi_*(x)<\xi^*(x)\})=0$ を得る．すなわち $\xi^*(x)=\xi_*(x)$ μ-$a.e.$ である．

$\eta_n\in L_1(\mu)$ $(\eta_n\geqslant0)$ なる関数列に対し

$$\underline{\lim_n}\int_X\eta_n d\mu<\infty$$

ならば，Fatou の定理により，$\underline{\lim_n}\,\eta_n$ は可積分である．関数 ξ_* が可積分，すなわち $\xi_*\in L_1(\mu)$ を示すために

$$\eta_n(x)=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^ix)\right|$$

とおくと

$$\int_X\eta_n d\mu=\int\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^ix)\right|d\mu\leqslant\int|\xi|d\mu$$

から，$\underline{\lim_n}\int_X\eta_n d\mu<\infty$ を得る．よって $\underline{\lim_n}\,\eta_n=|\xi_*|$ は可積分である．

次に

$$\int_X\xi d\mu=\int_X\xi^*d\mu$$

を示そう．$k\in\boldsymbol{Z}$ と $n\geqslant1$ に対し

$$D_k{}^n=\{x\in X:k/n\leqslant\xi^*(x)\leqslant(k+1)/n\}$$

とおくと，十分小さな $\varepsilon>0$ に対し

$$D_k^n\cap B_{(k/n)-\varepsilon}=D_k^n$$

である．よって，補題22·2によって

$$\int_{D_k^n}\xi d\mu\geqq\left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)\mu(D_k^n)$$

を得る．$\varepsilon>0$ は任意であるから

$$\int_{D_k^n}\xi d\mu\geqq\frac{k}{n}\mu(D_k^n).$$

このとき

$$\int_{D_k^n}\xi^*d\mu\leqq\frac{k+1}{n}\mu(D_k^n)\leqq\frac{1}{n}\mu(D_k^n)+\int_{D_k^n}\xi d\mu$$

が成り立つ．$\cup\{D_k^n:k\in\boldsymbol{Z}\}=X$ より，任意の $n\geqq1$ に対し

$$\int_X\xi^*d\mu\leqq\frac{1}{n}\mu(X)+\int_X\xi d\mu$$

が求まり，$n\to\infty$ とすると

$$\int_X\xi^*d\mu\leqq\int_X\xi d\mu$$

が成り立つ．関数 ξ の代わりに $-\xi$ を置き換えたとき

$$\int_X(-\xi)^*d\mu\leqq\int_X-\xi d\mu$$

を得る．よって

$$-\int_X\xi_*d\mu\leqq-\int_X\xi d\mu$$

である．ところで，$\xi_*=\xi^*\ \mu\text{-}a.e.$ が成り立っているから

$$\int_X\xi^*d\mu\geqq\int_X\xi d\mu$$

である．よって $\displaystyle\int_X\xi^*d\mu=\int_X\xi d\mu$ が求まる．

§23 距離空間の上の確率測度

距離空間の上の Borel 確率測度の性質を調べよう．(X,d) は距離空間とし，$\mathscr{B}$ を X の Borel クラスとする．X の上の Borel 確率測度 μ が**正則**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ と任意の Borel 集合 $B\in\mathscr{B}$ に対し

$$C_\varepsilon \subset B \subset U_\varepsilon,\quad \mu(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

を満たす閉集合 C_ε と開集合 U_ε が存在するときをいう（Lebesgue 測度の正則性は§21 の注意 21·4 を参照）

定理 23·1 すべての Borel 確率測度 μ は正則である.

証明 集合 $\mathscr{M}$ は次を満たす Borel クラス $\mathscr{B}$ の部分族とする.

$$\mathscr{M} = \left\{ A \in \mathscr{B} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon>0 \text{ に対し, 開集合 } U_\varepsilon \text{ と閉集合 } C_\varepsilon \text{ が} \\ \text{存在して } C_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon,\ \mu(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \text{ を満たす} \end{array} \right\}$$

このとき, $\mathscr{M}$ は開集合全体を含む σ-集合体であることを示せば, $\mathscr{M}=\mathscr{B}$ となって μ が正則であることがわかる.

最初に, $\mathscr{M}$ は σ-集合体であることを示そう. まず X は開かつ閉であるから, $X \in \mathscr{M}$ である. $A \in \mathscr{M}$ ならば, $\varepsilon>0$ に対し開集合 U_ε と閉集合 C_ε が存在して $C_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$, $\mu(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ が成り立つ. よって

$$X \setminus C_\varepsilon \supset X \setminus A \supset X \setminus U_\varepsilon,\quad (X \setminus C_\varepsilon) \setminus (X \setminus U_\varepsilon) = U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$$

であるから, $\mu((X \setminus C_\varepsilon) \setminus (X \setminus U_\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$. よって, $X \setminus A \in \mathscr{M}$ である. $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{M}$ ならば, $\varepsilon>0$ に対し開集合 $U_{\varepsilon,n}$ と閉集合 $C_{\varepsilon,n}$ が存在して

$$C_{\varepsilon,n} \subset A_n \subset U_{\varepsilon,n},\quad \mu(U_{\varepsilon,n} \setminus C_{\varepsilon,n}) < \varepsilon/2^n$$

とできる. $U_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\varepsilon,n}$ は開集合, しかし, $\tilde{C}_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\varepsilon,n}$ は閉集合とは限らない. ここで

$$\mu(\tilde{C}_\varepsilon \setminus \bigcup_{n=1}^{k} C_{\varepsilon,n}) \leqslant \varepsilon/2$$

となるように $k>0$ を選び, $C_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{k} C_{\varepsilon,n}$ とおく. 明らかに, C_ε は閉集合であり

$$C_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset U_\varepsilon$$

が成り立つ. さらに

$$\begin{aligned} \mu(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) &\leqslant \mu(U_\varepsilon \setminus \tilde{C}_\varepsilon) + \mu(\tilde{C}_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_{\varepsilon,n} \setminus C_{\varepsilon,n}) + \mu(\tilde{C}_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\mathscr{M}$ は σ-集合体であることが示された．次に，$\mathscr{M}$ は X の閉集合全体を含むことを示せばよい．

C は X の1つの閉集合とし，C を含む開集合の列 $U_n(n\geqslant 1)$ を

$$U_n=\{x\in X: d(C,x)<1/n\}$$

によって定義する．ここに $d(C,x)=\inf\{d(y,x): y\in C\}$ である．明らかに

$$U_1\supset U_2\supset\cdots\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=C$$

任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\mu(U_k\setminus C)\leqslant\varepsilon$ となる $k>0$ を固定し，$U_\varepsilon=U_k, C_\varepsilon=C$ とおくと，$C_\varepsilon\subset C\subset U_\varepsilon$ が成り立ち，$C\in\mathscr{M}$ が求まる．よって $\mathscr{M}$ は閉集合を含む．

注意 23·1　Borel 確率測度 μ は次の性質をもつ．任意の $B\in\mathscr{B}$ に対し

$$\mu(B)=\sup\{\mu(C): C\subset B, C \text{ は閉集合}\}$$
$$\mu(B)=\inf\{\mu(U): B\subset U, U \text{ は開集合}\}$$

証明　定理23·1から明らかである．

定理 23·2　μ,ν は Borel 確率測度とする．このとき，すべての連続関数 $\xi\in C(X)$ に対し

$$\int_X \xi d\mu=\int_X \xi d\nu$$

ならば，$\mu(B)=\nu(B)$ $(B\in\mathscr{B})$ が成り立つ．

証明　任意の閉集合 C に対し，$\mu(C)=\nu(C)$ であれば，注意23·1より，すべての $B\in\mathscr{B}$ に対し $\mu(B)=\nu(B)$ である．測度 μ は正則であるから，$\varepsilon>0$ に対し，$U\supset C$, $\mu(U\setminus C)\leqslant\varepsilon$ を満たす開集合 U が存在する．

$$\xi(x)=\begin{cases}0 & x\notin U\\ \dfrac{d(x,X\setminus U)}{d(x,X\setminus U)+d(x,C)} & x\in U\end{cases}$$

によって，連続関数 $\xi: X\to\boldsymbol{R}$ を定義する．明らかに，$X\setminus U$ の上で $\xi(x)=0$, C の上で $\xi(x)=1$, X の上では $0\leqslant\xi(x)\leqslant 1$ が成り立つ．よって

$$\nu(C)\leqslant\int_X \xi d\nu=\int_X \xi d\mu<\mu(C)+\varepsilon.$$

ε は任意であるから，$\varepsilon\to 0$ とするとき $\nu(C)\leqslant\mu(C)$ である．ν と μ を入れ換えて同じようにして，$\mu(C)\leqslant\nu(C)$ が求まる．ゆえに $\mu(C)=\nu(C)$.

定理 23·3　(X,d) はコンパクト距離空間とし，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu$ は X の上の Borel 確率測度であるとする．このとき次は互いに同値である．

（1）　$\lim_{n\to\infty}\int_X \xi d\mu_n=\int\xi d\mu$　　$(\xi\in C(X))$.

（2）　$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(C)\leqslant\mu(C)$　　（閉集合 $C\subset X$).

（3）　$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n(U)\geqslant\mu(U)$　　（開集合 $U\subset X$).

（4）　$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$　　（A は $\mu(\partial A)=0$ なる Borel 集合．∂A は A の境界).

証明　（2）$\Leftrightarrow$（3）は明らかである．

（1）$\Rightarrow$（2）の証明：C は閉集合とし，$k\geqslant 1$ に対して

$$U_k=\{x\in X: d(x,C)<1/k\}$$

とする．明らかに，$U_k\searrow C$ である．だから $\mu(U_k)\searrow\mu(C)$. X はコンパクトであるから

$$\xi_k(x)=\begin{cases}1 & x\in C\\ 0 & x\notin U_k\end{cases}$$

を満たし，すべての $x\in X$ に対し $0\leqslant\xi_k(x)\leqslant 1$ なる連続関数が存在する．ゆえに

$$\overline{\lim_n}\,\mu_n(C)\leqslant\overline{\lim_n}\int_X\xi_k d\mu_n=\int_X\xi_k d\mu\leqslant\mu(U_k).$$

k は任意であるから

$$\overline{\lim_n}\,\mu_n(C)\leqslant\mu(C)$$

である．

（2），（3）$\Rightarrow$（4）の証明：$A\in\mathscr{B}$ に対し，$\bar{A}$ を A の閉包，$\mathrm{int}(A)$ を A の内部とするとき，$\mu(\partial A)=0$ とすれば

$$\mu(\mathrm{int}(A))=\mu(A)=\mu(\bar{A})$$

である．ゆえに

$$\overline{\lim_n}\ \mu_n(A) \leqslant \overline{\lim_n}\ \mu_n(\bar{A}) \leqslant \mu(\bar{A}) = \mu(A),$$

$$\underline{\lim_n}\ \mu_n(A) \geqslant \underline{\lim_n}\ \mu_n(\mathrm{int}(A)) \geqslant \mu(\mathrm{int}(A)) = \mu(A)$$

である．だから

$$\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$$

が成り立つ．

（4）⇒（1）の証明：$\xi \in C(X)$ に対し

$$m = \min\{\xi(x) - 1 : x \in X\},\quad M = \max\{\xi(x) + 1 : x \in X\}$$

とおく．閉区間 $[m, M]$ の Borel 集合 E に対し

$$\nu(E) = \mu(\xi^{-1}E)$$

とおくと，ν は $[m, M]$ の上の Borel 確率測度である．$\nu(\{t\}) = 0$ なる $t \in [m, M]$ は稠密に存在する．だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$m = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = M$$

なる t_j が存在して，すべての j に対し

$$t_j - t_{j-1} < \varepsilon,\quad \mu(\{t_j\}) = 0$$

とできる．ここで

$$A_j = \{x \in X : t_{j-1} \leqslant \xi(x) < t_j\} \quad (1 \leqslant j \leqslant k)$$

とおくと，$A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathscr{B}$，かつそれらは X の分割である．

$$\bar{A}_j \setminus \mathrm{int}(A_j) = \{x \in X : \xi(x) = t_{j-1}\ あるいは\ \xi(x) = t_j\}$$

であるから，$\mu(\partial A_j) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ が成り立つ．よって，十分大きな n に対し

$$|\mu_n(A_j) - \mu(A_j)| < \varepsilon / \sum_{i=0}^{k} t_i$$

である．単調関数列 $\{\sum_{j=0}^{k} t_j 1_{A_j}(x) ; 0 \leqslant k < \infty\}$ は ξ に一様収束するから，十分大きい k と上のように選ばれた n に対し

$$\begin{aligned}
\left| \int_X \xi d\mu_n - \int_X \xi d\mu \right| \leqslant & \left| \int_X \xi d\mu_n - \int_X \sum_{j=0}^{k} t_j 1_{A_j} d\mu_n \right| \\
& + \left| \int_X \sum_{j=0}^{k} t_j 1_{A_j} d\mu_n - \int_X \sum_{j=0}^{k} t_j 1_{A_j} d\mu \right| \\
& + \left| \int_X \sum_{j=0}^{k} t_j 1_{A_j} d\mu - \int_X \xi d\mu \right| \\
& < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

とできる．よって（1）が求まる．

コンパクト距離空間の上の Borel 確率測度の存在を調べよう．

X は任意の空間とし，X の上で定義された実数値関数の全体を $\boldsymbol{F}$ で表す．$\boldsymbol{F}$ の部分族 $\boldsymbol{F}_0$ が次の条件（*）を満たすとき，$\boldsymbol{F}_0$ を**初等関数族**という．

（*）　$\xi, \eta \in \boldsymbol{F}_0 \Rightarrow a\xi + b\eta \in \boldsymbol{F}_0 (a, b \in \boldsymbol{R})$，$\min\{\xi, \eta\}$，$\min\{\xi, 1\}$，
$\max\{\xi, \eta\} \in \boldsymbol{F}_0$．

定理 23・4　空間 X の上のある初等関数族 $\boldsymbol{F}_0$ の上で定義された次を満たす写像 $J : \boldsymbol{F}_0 \to \boldsymbol{R}$

（1）　$\xi \geqslant 0 \;\Rightarrow\; J(\xi) \geqslant 0$

（2）　$J(\xi+\eta) = J(\xi) + J(\eta)$

（3）　$\xi_n \downarrow 0 \;\Rightarrow\; J(\xi_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$

が存在するならば，$\boldsymbol{F}_0$ の各関数を可測とする σ-集合体 $\mathscr{F}$ とその上の測度 μ が存在して

$$J(\xi) = \int_X \xi(x) d\mu \quad (\xi \in \boldsymbol{F}_0)$$

とできる．

この定理から次がわかる．

定理 23・5　(X, d) はコンパクト距離空間とする．J は $C(X)$ から実数体 $\boldsymbol{R}$ への連続線形写像で，$\xi \in C(X)$ に対し $\xi \geqslant 0$ のとき，$J(\xi) \geqslant 0$ かつ $J(1) = 1$ を満たすならば，X の上に Borel 確率測度 μ が存在して

$$J(\xi) = \int_X \xi d\mu \quad (\xi \in C(X))$$

とできる．

証明　$C(X)$ は次の補題 23・1 より初等関数族である．ゆえに定理 23・4 の条件（3）は写像 $J : C(X) \to \boldsymbol{R}$ の連続性から求まる．よって $C(X)$ の各関数を可測とする σ-集合体 $\mathscr{F}$ とその上の測度 μ が存在して，$J(\xi) = \int_X \xi d\mu \; (\xi \in C(X))$ と表される．明らかに $\mathscr{F}$ は X の開集合全体を含むから，Borel クラス $\mathscr{B}$ を含み $1 = J(1) = \int_X 1 d\mu = \mu(X)$ である．だから μ を $\mathscr{B}$ へ制限すれば μ は

Borel 確率測度である.

補題 23·1 $\xi,\eta\in C(X)$ に対し，$\min\{\xi,\eta\}$，$\max\{\xi,\eta\}\in C(X)$ である.

証明 $a<b$ とする．開区間 $A=(a,+\infty)$，$B=(-\infty,b)$ に対して，$A\cap B=(a,b)$ は開区間である．このような開区間は $\boldsymbol{R}$ の位相の基底である．よって $\min\{\xi,\eta\}$，$\max\{\xi,\eta\}$ の連続性は A,B の $\min\{\xi,\eta\}$，$\max\{\xi,\eta\}$ による逆像が開集合であることを示せばよい．ところで

$$\begin{aligned}\max\{\xi,\eta\}^{-1}(A)&=\{x\in X:\max\{\xi(x),\eta(x)\}>a\}\\&=\{x\in X:\xi(x)>a\}\cup\{x\in X:\eta(x)>a\},\\\max\{\xi,\eta\}^{-1}(B)&=\{x\in X:\max\{\xi(x),\eta(x)\}<b\}\\&=\{x\in X:\xi(x)<b\}\cap\{x\in X:\eta(x)<b\}.\end{aligned}$$

であるから，それぞれ開集合である．ξ が連続であれば，$-\xi$ もそうである．よって $-\min\{\xi,\eta\}=\max\{-\xi,-\eta\}$ から，$\min\{\xi,\eta\}$ も連続である.

定理 23·4 の証明

証明は4段階に分けて行う．以後，$a,b,c,\cdots$ は実数，$\boldsymbol{F}_0$ の元を $\xi,\eta,\zeta,\cdots$，$\xi',\eta',\zeta',\cdots$ で，$\boldsymbol{F}$ の元を $\varphi,\psi,\cdots$ で表す．簡単のために，$\min\{\xi,\eta\}$ を $\xi\wedge\eta$ で，$\max\{\xi,\eta\}$ を $\xi\vee\eta$ で表すことにする.

1段階 仮定によって

$$0\in\boldsymbol{F}_0,\ J(0)=0$$

$$\xi\geqslant\eta\ \Rightarrow\ J(\xi)\geqslant J(\eta)$$

$$\xi_n\nearrow\xi\ (\xi_n\searrow\xi)\ \Rightarrow\ J(\xi_n)\to J(\xi)$$

$$J(a\xi+b\eta)=aJ(\xi)+bJ(\xi)$$

が求まる．次はこの証明の中で何回も用いられる.

(i) $\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\cdots\leqslant\lim_n\xi_n\geqslant 0\ \Rightarrow\ \lim_n J(\xi_n)=\lim_n J(\xi_n{}^+)\quad(\xi^+=\xi\vee 0).$

何故ならば，$\xi_n{}^-=(-\xi_n)\vee 0$ とすると，仮定より

$$\xi_n{}^-\searrow 0.\ \text{よって}\ \lim_n J(\xi_n{}^-)=0.$$

ゆえに

$$\lim_n J(\xi_n)=\lim_n J(\xi_n{}^+-\xi_n{}^-)=\lim_n J(\xi_n{}^+)-\lim_n J\xi({}_n{}^-)=\lim_n J(\xi_n{}^+).$$

2段階　$\boldsymbol{F}_0$ の関数列 $\{\xi_n\}$ で

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \cdots,\quad \lim J(\xi_n) < \infty$$

を満たす列 $\{\xi_n\}$ の全体を (U) と表し，列 $\{\xi_n\}$ が

$$\xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \cdots,\quad \lim_n J(\xi_n) > -\infty$$

を満たすとき，この列 $\{\xi_n\}$ の全体を (L) と書くことにしよう．

$\boldsymbol{F}$ の元 φ に対し，$\{\xi_n\} \in (U)$ と $\{\xi_n'\} \in (L)$ が存在して

(ii)　$\lim_n \xi_n \geqslant \varphi \geqslant \lim_n \xi_n'$

を満たす φ の全体を $\tilde{\boldsymbol{F}}_0$ とする．

上の不等式を満たす $\{\xi_n\}, \{\xi_n'\}$ に対する $\lim_n J(\xi_n)$ の下限および $\lim_n J(\xi_n')$ の上限をそれぞれ $L^*(\varphi), L_*(\varphi)$ で表す．このとき

(iii)　$L^*(\varphi) \geqslant L_*(\varphi)$

が成り立つ．何故ならば，(ii) の ξ_n, ξ_n' をとると，$\eta_n = \xi_n - \xi_n'$ は単調増大で，$\lim_n \eta_n \geqslant 0$．ゆえに (i) により

$$\lim_n J(\xi_n) - \lim_n J(\xi_n') = \lim_n J(\xi_n - \xi_n') = \lim_n J(\eta_n) = \lim_n J(\eta_n^+) \geqslant 0.$$

これから (iii) が得られる．

$L^*(\varphi) = L_*(\varphi)$ の時，φ を**可積分**といい，その値を$L(\varphi)$ で表す．可積分関数 φ の全体を $\mathscr{L}$ と書くことにする．このとき $\mathscr{L} \subset \tilde{\boldsymbol{F}}_0$ である．

($\mathscr{L}$. 1)　$\xi \in \boldsymbol{F}_0$ は可積分で，$L(\xi) = J(\xi)$ である (ゆえに $\boldsymbol{F}_0 \subset \mathscr{L} \subset \tilde{\boldsymbol{F}}_0$)．

何故ならば，$\xi_n = \xi$ ($n = 1, 2, \cdots$) は (ii) を満たすから，$L^*(\xi) \leqslant J(\xi)$ は明らかである．いま，(ii) を満たす一般の $\{\xi_n\} \in (U)$をとれば，$\lim_n (\xi_n - \xi) \geqslant 0$．ゆえに (i) により

$$\lim_n J(\xi_n) - J(\xi) = \lim_n J(\xi_n - \xi) = \lim_n J((\xi_n - \xi)^+) \geqslant 0.$$

したがって $\lim J(\xi_n) \geqslant J(\xi)$ で，$L^*(\xi) \geqslant J(\xi)$ となる．ゆえに $L^*(\xi) = J(\xi)$．同様に $L_*(\xi) = J(\xi)$．ゆえに $\xi \in \mathscr{L}$ で $L(\xi) = J(\xi)$．

($\mathscr{L}$. 2)　$\varphi \in \mathscr{L} \Rightarrow a\varphi \in \mathscr{L}$，$L(a\varphi) = aL(\varphi)$．

これは $a \geqslant 0$ のとき

$$L^*(a\varphi) = aL^*(\varphi),\quad L_*(a\varphi) = aL_*(\varphi)$$

$a < 0$ のとき

$$L^*(a\varphi)=aL_*(\varphi),\quad L_*(a\varphi)=aL^*(\varphi)$$

が成り立つから，（$\mathscr{L}$. 2）が得られる．

（$\mathscr{L}$. 3） $\varphi,\psi\in\mathscr{L} \Rightarrow \varphi+\psi\in\mathscr{L}$，$L(\varphi+\psi)=L(\varphi)+L(\psi)$.

何故ならば，$\varphi,\psi\in\tilde{\boldsymbol{F}}_0 \Rightarrow \varphi+\psi\in\tilde{\boldsymbol{F}}_0$ で，定義より

（iv） $L_*(\varphi)+L_*(\psi)\leqslant L_*(\varphi+\psi)\leqslant L^*(\varphi+\psi)\leqslant L^*(\varphi)+L^*(\psi)$

が成り立つから，（$\mathscr{L}$. 3）が得られる．

（$\mathscr{L}$. 2）と（$\mathscr{L}$. 3）を合わせて

（$\mathscr{L}$. 4） $\varphi,\psi\in\mathscr{L} \Rightarrow a\varphi+b\psi\in\mathscr{L}$，$L(a\varphi+b\psi)=aL(\varphi)+bL(\psi)$.

次に

（$\mathscr{L}$. 5） $\varphi,\psi\in\mathscr{L} \Rightarrow \varphi\vee\psi, \varphi\wedge\psi\in\mathscr{L}$

を証明しよう．最初に

（v） $\xi\vee\eta-\xi'\vee\eta'\leqslant(\xi-\xi')^++(\eta-\eta')^+$

$\xi\wedge\eta-\xi'\wedge\xi'\leqslant(\xi-\xi')^++(\eta-\eta')^+$

を示そう．$\zeta'=\xi'\vee\eta'$ とおくと

$$\begin{aligned}\xi\vee\eta-\xi'\vee\eta'&=\xi\vee\eta-\zeta'=(\xi-\zeta')\vee(\eta-\zeta')\\&\leqslant(\xi-\xi')\vee(\eta-\eta')\leqslant(\xi-\xi')^+\vee(\eta-\eta')^+\\&\leqslant(\xi-\xi')^++(\eta-\eta')^+.\end{aligned}$$

$\zeta=\xi\wedge\eta$ とおくと

$$\begin{aligned}\xi\wedge\eta-\xi'\wedge\eta'&=\zeta-\xi'\wedge\eta'=(\zeta-\xi')\vee(\zeta-\eta')\\&\leqslant(\xi-\xi')\vee(\eta-\eta')\leqslant(\xi-\xi')^++(\eta-\eta')^+\end{aligned}$$

さて φ,ψ に対し $\{\xi_n\},\{\eta_n\}\in(U)$ と $\{\xi_n'\},\{\eta_n'\}\in(L)$ が存在して

（vi） $\lim_n \xi_n\geqslant\varphi\geqslant\lim_n \xi_n'$，$\lim_n \eta_n\geqslant\psi\geqslant\lim \eta_n'$

とできる．$\zeta_n=\xi_n\vee\eta_n, \zeta_n'=\xi_n'\vee\eta_n'$ とおくと

$$\lim_n \zeta_n\geqslant\varphi\vee\psi\geqslant\lim_n \zeta_n',\ \{\zeta_n\}\in(U),\ \{\zeta_n'\}\in(L)$$

である．（v）により

$$\zeta_n-\zeta_n'\leqslant(\xi_n-\xi_n')^++(\eta_n-\eta_n')^+$$

であり，（vi）により

$$\lim_n(\xi_n-\xi_n')\geqslant0,\quad \lim_n(\eta_n-\eta_n')\geqslant0$$

であるから，（ i ）によって

$$L^*(\varphi\vee\psi)-L_*(\varphi\vee\psi)\leqslant\lim_n J(\zeta_n)-\lim_n J(\zeta_n')$$

$$=\lim_n J(\zeta_n-\zeta_n')$$

$$\leqslant\lim_n J((\xi_n-\xi_n')^+)+\lim_n J((\eta_n-\eta_n')^+)$$

$$=\lim_n J(\xi_n-\xi_n')+\lim_n J(\eta_n-\eta_n')$$

$$=\{\lim_n J(\xi_n)-\lim_n J(\xi_n')\}+\{\lim_n J(\eta_n)-\lim_n J(\eta_n')\}.$$

(vi) を満たす $\{\xi_n\}, \{\xi_n'\}, \{\eta_n\}, \{\eta_n'\}$ をいろいろ変えて右辺の下限をとると

$$L^*(\varphi\vee\psi)-L_*(\varphi\vee\psi)\leqslant(L^*(\varphi)-L_*(\varphi))+(L^*(\psi)-L_*(\psi))$$

が得られる．したがって $\varphi,\psi\in\mathscr{L}$ から $\varphi\vee\psi\in\mathscr{L}$ が求まる．$\varphi\wedge\psi$ についても同様である．

($\mathscr{L}$. 6) $\varphi\in\mathscr{L} \Rightarrow \varphi\wedge a\in\mathscr{L}$ $(a>0)$.

何故ならば，（ v ）により

$$\xi\wedge a-\xi'\wedge a\leqslant(\xi-\xi')^+$$

となるが，これを利用すると

$$0\leqslant L^*(\varphi\wedge a)-L_*(\varphi\wedge a)\leqslant L^*(\varphi)-L_*(\varphi)=0 \quad (\varphi\in\mathscr{L})$$

が得られる．よって $\varphi\wedge a\in\mathscr{L}$ である．

($\mathscr{L}$. 7) $\varphi_n\geqslant0, \varphi_n\in\mathscr{L}, \sum L(\varphi_n)<\infty \Rightarrow \varphi=\sum\varphi_n\in\mathscr{L}, L(\varphi)=\sum L(\varphi_n)$.

何故ならば

$$\varphi\geqslant\psi \Rightarrow L^*(\varphi)\geqslant L^*(\psi),\ L_*(\varphi)\geqslant L_*(\psi)$$

は明らかであるから，(iv) により

$$L^*(\varphi)\geqslant L^*(\sum_1^n\varphi_k)\geqslant\sum_1^n L_*(\varphi_k)=\sum_1^n L(\varphi_k).$$

$n\to\infty$ として，$L_*(\varphi)\geqslant\sum_1^\infty L(\varphi_k)$，ゆえに $L^*(\varphi)\leqslant\sum_1^\infty L(\varphi_k)$ を示せば十分である．各 φ_k に対し，$\{\xi_{k,n}\}\in(U)$ を選び

$$\lim_n \xi_{k,n}\geqslant\varphi_k,\quad \lim_n J(\xi_{k,n})\leqslant L(\varphi_k)+\varepsilon/2^k$$

とできる．$\varphi_k\geqslant0$ であるから，$\xi_{k,n}\geqslant0$ としてよい．

(vii) $\xi_n=\xi_{1,n}+\xi_{2,n}+\cdots+\xi_{n,n}$

とおくと，ξ_n は単調増大で

$$\lim_n J(\xi_n)=\lim_n\left(\sum_{k=1}^{n} J(\xi_{k,n})\right)\leqslant \lim_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} J(\xi_{k,n})\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lim_n J(\xi_{k,n})$$

$$<\sum_{k=1}^{\infty} L(\varphi_k)+\varepsilon<\infty.$$

したがって $\{\xi_n\}\in(U)$，また (vii) から

$$\xi_n\geqslant\sum_{k=1}^{m}\xi_{k,n}\quad(m\leqslant n).$$

ゆえに

$$\lim_n \xi_n\geqslant\sum_{k=1}^{m}\lim_n\xi_{k,n}\geqslant\sum_{k=1}^{m}\varphi_k.$$

$m\to\infty$ として

$$\lim \xi_n\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k=\varphi$$

よって

$$L^*(\varphi)\leqslant\lim_n J(\xi_n)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}L(\varphi_k)+\varepsilon.$$

$\varepsilon\to 0$ として，$L^*(\varphi)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}L(\varphi_k)$ を得る．

($\mathscr{L}$. 8) $\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots$，$\varphi_n\in\mathscr{L}$，$\lim_n L(\varphi_n)<\infty$

$$\Rightarrow\ \varphi=\lim_n\varphi_n\in\mathscr{L},\ L(\varphi)=\lim_n L(\varphi_n).$$

何故ならば

$$\varphi=\lim_n\varphi_n=\varphi_1+\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{n+1}-\varphi_n)$$

と考えて，($\mathscr{L}$. 7) を利用すればよい．

($\mathscr{L}$. 9) $\varphi_n\in\mathscr{L}$，$\varphi_1\geqslant\varphi_2\geqslant\cdots\geqslant 0\Rightarrow\varphi=\lim_n\varphi_n\in\mathscr{L}$，$L(\varphi)=\lim L(\varphi_n)$.

これは $\psi_n=\varphi_1-\varphi_n$ とおいて，($\mathscr{L}$. 4) を用いて ($\mathscr{L}$. 8) に帰着させることができる．

3段階 さて測度を定義しよう．集合 A の定義関数 1_A が可積分であるような A の全体を $\mathscr{M}_0$ で表し

$$\mu(A)=L(1_A)$$

と定義する．このとき $\mathscr{L}$ の性質より

($\mathscr{M}_0$. 1) $A, B\in\mathscr{M}_0 \Rightarrow A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B\in\mathscr{M}_0$

($\mathscr{M}_0$. 2) $A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{M}_0,\ A_1\supset A_2\supset\cdots \Rightarrow \lim A_n\in\mathscr{M}_0$

($\mathscr{M}_0$. 3) $A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{M}_0 \Rightarrow \cap A_n\in\mathscr{M}_0$

これは ($\mathscr{M}_0$.1) と ($\mathscr{M}_0$.2) から求まる．$L(\varphi)$ の性質から

(μ. 1) $\mu(\phi)=0,\ \mu(A)\geqslant 0.$

(μ. 2) (完全加法性) $A, A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{M}_0,\ A_i\cap A_j=\phi(i\neq j),\ A=\cup A_n \Rightarrow \mu(A)=\sum\mu(A_n).$

ところで，$A_n\in\mathscr{M}_0$ ($n=1, 2, \cdots$) であっても，$\cup A_n\in\mathscr{M}_0$ とは限らない．そこで $\mathscr{M}_0$ を拡張する．すなわち

$$E=\cup A_n,\ A_i\cap A_j=\phi(i\neq j),\ A_n\in\mathscr{M}_0$$

なる E の全体を $\mathscr{M}_1$ で表す．$E=\cup A_n(A_n\in\mathscr{M}_0)$ の全体といっても同じである．明らかに

$$E_n\in\mathscr{M}_1, n=1, 2, \cdots \Rightarrow \cup E_n\in\mathscr{M}_1$$

である．また

$$E, F\in\mathscr{M}_1 \Rightarrow E\setminus F\in\mathscr{M}_1.$$

実際に，$E=\cup A_n,\ F=\cup B_n,\ A_n, B_n\in\mathscr{M}_0$ とすると

$$E\setminus F=\cup A_n\setminus\cup B_n=\bigcup_n\{\bigcap_m(A_n\setminus B_m)\}\in\mathscr{M}_1.$$

μ を $\mathscr{M}_1$ の上に拡張するには，$E=\cup A_n\in\mathscr{M}_1$ を互いに共通部分をもたない集合の和集合 $E=\cup A_n'$ ($A_n'\in\mathscr{M}_1$) に表して

$$\mu(E)=\sum\mu(A_n')$$

と定義する．この定義は E の分割の形に関係しないで，E だけで定まることは μ が $\mathscr{M}_0$ の中で完全加法性 (μ.2) をもつことからわかる．この拡張された μ が (μ.1)，(μ.2) を満たすことは簡単に示される．

さて，全空間 X が $\mathscr{M}_1$ に属するならば，$\mathscr{M}_1$ は σ-集合体で，μ は $(X, \mathscr{M}_1)$ の上の測度となる．しかし $X\notin\mathscr{M}_1$ のときには，$\mathscr{M}_1$ をさらに拡張する必要がある．すなわち $S\in\mathscr{M}_1$ のとき，$S^c\in\mathscr{M}_2$ なるように $\mathscr{M}_1$ を $\mathscr{M}_2$ まで拡げる．このとき，$S\in\mathscr{M}_1$ に対しては $\mu(S)$ は今まで通りとし，$S\in\mathscr{M}_2\setminus\mathscr{M}_1$ のときには $\mu(S)=\infty$ とすれば，$\mathscr{M}_2$ は σ-集合体で，μ は $(X, \mathscr{M}_2)$ の上の測度になる．

4 段階 $\xi\in\boldsymbol{F}_0$ は μ-可測で

$$J(\xi)=\int_X\xi d\mu$$

であることを証明しよう．

$\xi\in\boldsymbol{F}_0$ に対し，$\xi^+,\xi^-\in\boldsymbol{F}_0$，$\xi=\xi^+-\xi^-$ であることに注意すれば，$\xi\geqslant 0$ と仮定してよい．$a>0$ に対して

$$E(a)=\{x\in X:\xi(x)>a\}$$

の定義関数 $1_{E(a)}$ は

$$1_{E(a)}=\lim_n \xi_n,\quad \xi_n=\max\left\{k\left(\frac{\xi}{a}-\left(\frac{\xi}{a}\wedge 1\right)\right)\wedge 1\,;\,1\leqslant k\leqslant n\right\}$$

である．明らかに $\xi_n\in\mathscr{L}$，$\xi\geqslant a\xi_n$．だから

$$\lim_n L(a\xi_n)\leqslant L(\xi)=J(\xi)<\infty.$$

ゆえに，($\mathscr{L}$.8) により，$1_{E(a)}\in\mathscr{L}$．したがって $E(a)$ は μ-可測，すなわ ξ も μ-可測である．

$$\varphi_n=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k}{2^n}(1_{E(k/2^n)}-1_{E((k+1)/2^n)})$$

とおくと，$\varphi_n\in\mathscr{L}$ かつ $\varphi_n\nearrow\xi$．ゆえに

$$\begin{aligned}J(\xi)&=L(\xi)=\lim L(\varphi_n)\\&=\lim_n\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k}{2^n}\mu\left\{x\in X:\frac{k}{2^n}<\xi(x)\leqslant\frac{k+1}{2^n}\right\}\\&=\int_X\xi(x)d\mu.\end{aligned}$$

定理 23・4 は証明された．

§ 24 Borel 確率測度の集合とその構造

コンパクト距離空間 (X,d) の上の Borel 確率測度の全体を $\mathscr{M}(X)$ で表す．Banach 空間 $C(X)$ の中に稠密な可算集合が存在するから，それを $\{\xi_1,\xi_2,\cdots\{$ で表す．$\mu,\nu\in\mathscr{M}(X)$ に対し

$$D(\mu,\nu)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_X\xi_i d\mu-\int_X\xi_i d\nu\right|\Big/2^i\|\xi_i\|$$

とおくと，D は $\mathscr{M}(X)$ の上の距離関数であることが簡単に示される（ξ のノルムは $\|\xi\|=\max\{|\xi(x)|:x\in X\}$ によって定義されている）

定理 24·1 距離空間 $(\mathscr{M}(X), D)$ はコンパクトである．

距離空間 $(\mathscr{M}(X), D)$ がコンパクトであるためには，$\mathscr{M}(X)$ の任意の点列 $\{\mu_n : n\geqq 1\}$ が収束する部分列をもつことが必要十分である（Bolzano-Weierstrass の定理）．したがって次の定理を証明すれば十分である．

定理 24·2 $\mathscr{M}(X)$ の任意の列 $\{\mu_n : n\geqq 1\}$ に対し，その部分列 $\{\mu_{n_i}\}$ と $\mu\in\mathscr{M}(X)$ が存在して，すべての $\xi\in C(X)$ に対し

$$\lim_{i\to\infty}\int_X \xi d\mu_{n_i} = \int_X \xi d\mu$$

が成り立つ．

証明 $\xi\in C(X)$ に対し

$$\mu_n(\xi) = \int_X \xi d\mu_n \quad (n\geqq 1)$$

とおく．このとき $\mu_n(\xi)\leqq\int_X |\xi| d\mu_n$ $(n\geqq 1)$ であるから，実数列 $\{\mu_n(\xi_1)\}$ は有界である．よって収束する部分列 $\{\mu_n{}^{(1)}(\xi_1)\}$ が存在する．列 $\{\mu_n{}^{(1)}(\xi_2)\}$ は再び有界であるから，収束する部分列 $\{\mu_m{}^{(2)}(\xi_2)\}$ が存在する．これを帰納的に続けるとき

$$\{\mu_n\}\supset\{\mu_n{}^{(1)}\}\supset\{\mu_n{}^{(2)}\}\supset\cdots$$

となる部分列の族を得る．任意の $i\geqq 1$ に対し，$\xi=\xi_j$ $(1\leqq j\leqq i)$ であれば列 $\{\mu_n{}^{(i)}(\xi)\}$ は収束する．ゆえに $\{\mu_n{}^{(n)}\}$ に対し $\{\mu_n{}^{(n)}(\xi_i)\}$ $(i=1, 2, \cdots)$ は収束する．

任意の $\eta\in C(X)$ に対し，列 $\{\mu_n{}^{(n)}(\eta)\}$ が収束することを示すために

$$\lim_{i\to\infty}\|\xi_i-\eta\|=0$$

とすると，Lebesgue の収束定理によって

$$\lim_{i\to\infty}\mu_n{}^{(n)}(\xi_i)=\mu_n{}^{(n)}(\eta) \quad (n\geqq 1)$$

が成り立つ．任意の $\varepsilon>0$ に対し i が存在して $\|\xi_i-\eta\|<\varepsilon/3$ とできるので，この i を固定する．このときすべての $n\geqq 1$ に対し

$$|\mu_n{}^{(n)}(\xi_i)-\mu_n{}^{(n)}(\eta)|<\varepsilon/3$$

が成り立つ．ところで $\{\mu_n{}^{(n)}(\xi_i)\}$ は収束するから，十分大きな n, m に対して

$$|\mu_n^{(n)}(\xi_i)-\mu_m^{(m)}(\xi_i)|<\varepsilon/3$$

とできる．よって三角不等式を利用すると

$$|\mu_n^{(n)}(\eta)-\mu_m^{(m)}(\eta)|\leqq\varepsilon$$

を得る．$\varepsilon>0$ は任意であるから $\{\mu_n^{(n)}(\eta)\}$ は収束する．

さて $\xi\in C(X)$ に対し

$$K(\xi)=\lim_{n\to\infty}\mu_n^{(n)}(\xi)$$

とおくと，K は Banach 空間 $C(X)$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像である．任意の $\xi\in C(X)$ に対し

$$|K(\xi)|=|\lim_{n\uparrow\infty}\mu_n^{(n)}(\xi)|\leqq\lim_{n\to\infty}\mu_n^{(n)}(|\xi|)\leqq\|\xi\|$$

であるから，K は有界である．よって次の注意 24·1 から，K は連続線形写像である．さらに $K(1)=1$, $\xi\geqq0$ のとき $K(\xi)\geqq0$ を満たす．ゆえに定理 23.5 により，Borel 確率測度 μ が存在して

$$K(\xi)=\int_X\xi d\mu\quad(\xi\in C(X))$$

とできる．よって

$$\int_X\xi d\mu_n^{(n)}\to\int_X\xi d\mu\quad(n\to\infty)\quad(\xi\in C(X))$$

である．

注意 24·1 Banach 空間 $C(X)$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 K に対して，次は互いに同値である．

(1) K は連続である．

(2) K は $C(X)$ の 1 点において連続である．

(3) $a>0$ が存在して，すべての $\xi\in C(X)$ に対し $|K(\xi)|\leqq a\|\xi\|$ が成り立つ．

証明 (1) ⇒ (2) は明らかである．

(2) ⇒ (3) の証明：K は $\xi_0\in C(X)$ において連続であるとする．いま，$\varepsilon=1$ とすると，$\delta>0$ があって

$$\|\xi-\xi_0\|<\delta,\ \xi\in C(X)\quad\Rightarrow\quad\|K(\xi)-K(\xi_0)\|<1$$

が成り立つ．さて任意の $\xi\in C(X)$ ($\xi\neq0$) について

$$\xi' = \xi_0 + \frac{\delta}{2\|\xi\|}\xi$$

とすれば，$\xi' \in C(X)$ かつ $\|\xi' - \xi_0\| = \delta/2 < \delta$ であるから，$\|K(\xi') - K(\xi_0)\| < 1$ である．ところで，$\|K(\xi') - K(\xi_0)\| = (\delta/2\|\xi\|)\|K(\xi)\|$ から，$\|K(\xi)\| \leqslant (2/\delta)\|\xi\|$ となり，$a = 2/\delta$ とすれば，(3) が求まる．

(3) ⇒ (1) の証明：ξ_0 は $C(X)$ に属するとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \varepsilon/a$ とすれば，$\xi \in C(X)$，$\|\xi - \xi_0\| < \delta$ のとき

$$\|K(\xi) - K(\xi_0)\| = \|K(\xi - \xi_0)\| \leqslant a\|\xi - \xi_0\| < a\delta = \varepsilon$$

である．だから K は ξ_0 において連続である．よって K は $C(X)$ の各点で連続である．

注意 24・2　f はコンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像とする．このとき f と逆写像 f^{-1} は $\mathscr{B}$-可測（Borel 可測）である．

証明　$\mathscr{M} = \{E \in \mathscr{B} : f^{-1}(E) \in \mathscr{B}\}$，$\mathscr{M}' = \{E \in \mathscr{B} : f(E) \in \mathscr{B}\}$ なる集合族は X の開集合の全体を含む σ-集合体である．だから，$\mathscr{B} = \mathscr{M} = \mathscr{M}'$ が成り立つ．このことは f と f^{-1} が $\mathscr{B}$-可測であることを示している．

定理 24・3　(Krylov-Bogolioubov の定理)　f はコンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像とする．このとき X の上に

$$\mu(f(B)) = \mu(f^{-1}(B)) = \mu(B) \quad (B \in \mathscr{B})$$

を満たす Borel 確率測度 μ が存在する．

証明　点 $x \in X$ を固定して，任意の $n > 0$ と任意の $\xi \in C(X)$ に対し

$$K_n(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \xi(f^i x)$$

とおくと，$K_n : C(X) \to \boldsymbol{R}$ は有界線形写像である．よって K_n は連続である．だから定理 23・5 によって，X の上に Borel 確率測度 μ_n が存在して

$$K_n(\xi) = \int_X \xi d\mu_n \quad (\xi \in C(X))$$

とできる．定理 24・1 により，$\{\mu_n : n \geqslant 1\}$ から適当に部分列を選んで

$$K_{n_i}(\xi)\to\int_X \xi d\mu \quad (i\to\infty) \quad (\xi\in C(X))$$

が成り立つように $\mu\in\mathscr{M}(X)$ をみつけることができる．よって

$$|K_{n_i}(\xi\circ f)-K_{n_i}(\xi)|=\frac{1}{n_i}|\xi(f^{n_i}x)-\xi(x)|\leqq\frac{2}{n_i}\|\xi\|,$$

$$|K_{n_i}(\xi\circ f^{-1})-K_{n_i}(\xi)|=\frac{1}{n_i}|\xi(f^{-1}x)-\xi(f^{n_i-1}x)|\leqq\frac{2}{n_i}\|\xi\|$$

が成り立つ．だから $i\to\infty$ とするとき

$$\int_X \xi\circ f d\mu=\int_X \xi d\mu=\int_X \xi\circ f^{-1}d\mu \quad (\xi\in C(X))$$

ところで

$$\int_X \xi(fx)\mu(dx)=\int_X \xi(x)\mu\circ f^{-1}(dx),$$

$$\int_X \xi(f^{-1}x)\mu(dx)=\int_X \xi(x)\mu\circ f(dx)$$

であるから，定理 23・2 により，すべての $B\in\mathscr{B}$ に対し $\mu(fB)=\mu(f^{-1}B)=\mu(B)$ が成り立つ．

同相写像 f に対し，$\mu(f^{-1}B)=\mu(fB)=\mu(B)$ $(B\in\mathscr{B})$ を満たす Borel 確率測度 μ を f-**不変測度**といい，f を μ-**保測**であるという．f-不変 Borel 確率測度の全体を $\mathscr{M}_f(X)$ で表す．

注意 24・3 $\Omega(f)$ はコンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f の非遊走集合とする．このとき，すべての $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し，$\mu(\Omega(f))=1$ である．

証明 $X\neq\Omega(f)$ の場合を確かめればよい．$X\setminus\Omega(f)$ に属する点 x は遊走点であるから，x のある近傍 U とすべての $n>0$ に対し，$f^n(U)\cap U=\phi$ が成り立つ．よって，$\{f^{-n}(U):n\geqq 0\}$ は互いに交わらない開集合列である．だから

$$1\geqq\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty}f^{-n}(U))=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(f^{-n}(U))$$

が成り立つ．μ は f-不変であるから，$\mu(U)=0$ でなくてはならない．

さて，$X\setminus\Omega(f)$に含まれる Borel 集合 E が $\mu(E)>0$ と仮定する．μ は正則(定理 23・1) であるから，$\mu(C)>0$, $C\subset E$ なる閉集合が存在する．C の各点 x は遊走点であるから適当な開近傍 U_x を選び，$f^n(U_x)\cap U_x=\phi$ $(n>0)$ とでき

る．C はコンパクトであるから，有限個の開近傍 $U_{x_1},\cdots,U_{x_k}$ $(x_1,\cdots x_k\in C)$ によってC は被覆される．よって，いずれかの U_{x_i} は $\mu(U_{x_i})>0$ である．しかしこれは起こり得ない．よって $\mu(X\setminus\Omega(f))=0$ である．

注意 24・4 (1) G はコンパクト位相群とする．このとき G の上に

$$\mu(xE)=\mu(Ex)=\mu(E)\quad(E \text{ は Borel 集合，} x\in G)$$

を満たす Borel 有限測度 μ が定数倍を除いて一意的に存在する．ここに $xE=\{xy: y\in E\}$ を表す．このような測度を **Haar 測度**という．

Haar 測度の存在の証明は省略する（証明に対しては文献表〔4〕を参照されたい）．特に G が k 次元トーラス T^k であれば，$G=T^k$ の上の Lebesgue 測度は Haar 測度である．

$\mu(G)<\infty$ であるから，Borel 集合 E に対し

$$\nu(E)=\mu(E)/\mu(G)$$

とおくと，ν は確率測度である．さらに

$$\nu(xE)=\nu(Ex)=\nu(E)\quad(x\in G)$$

を満たす．すなわち ν は G の上の Haar 確率測度である．G の単位元 e の開近傍 U に対し，$\{xU: x\in G\}$ は G の開被覆をなす．何故ならば，任意の点 $x_0\in G$ を固定して，$\varphi_{x_0}: x\mapsto x_0x$ なる写像を考えると，φ_{x_0} は G の上の同相写像であることからわかる．

G はコンパクトであるから，有限被覆$\{x_1U,\cdots,x_kU\}$ を選ぶことができる．よって

$$\nu(G)=\nu\Big(\bigcup_{i=1}^{k}x_iU\Big)\leqq\sum_{i=1}^{k}\nu(x_iU)=k\nu(U)$$

である．このことは空でない G の開集合はいつでも正の測度をもつことを意味している．

f は G の上の自己同型写像とする（f は同相かつ $f(xy)=f(x)f(y)$, $x, y\in G$ を満たす写像），ν は G の上の Haar 確率測度とする．このとき Borel 集合 E に対し

$$\nu(f(xE))=\nu(f(x)f(E))=\nu(fE)\quad(x\in G)$$

を満たすから，$\nu\circ f$ も Haar 確率測度である．よって Haar 測度の存在の一意

性によって

$$\nu(fE)=\nu(E) \quad (E \text{ は Borel 集合})$$

が成り立つ．同様にして $\nu(f^{-1}E)=\nu(E)$ も求まる．

（2） f は k 次元トーラス T^k の上の自己同型写像とする．このとき f の非遊走集合 $\Omega(f)$ は T^k と一致する．

証明 T^k の上の Haar 確率測度の存在と合わせ，注意 24・3 から $T^k=\Omega(f)$ が求まる．

注意 24・5 2次元トーラス T^2 の上に行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって与えられた自己同型写像 f は位相混合的である．より一般に k 次元トーラス T^k の上に，すべての固有値が絶対値 1 でない整数を成分とする行列が与えられ，特にその逆行列も各成分が整数であるとき，そのような行列によって定義される T^k の上の自己同型写像は位相混合的である．

証明 後半の命題は前半が示されれば明らかである．よって前半の証明を与えよう．

注意 24・4 により，$T^2=\Omega(f)$ である．与えられた固有値は絶対値が 1 ではないから，定理 14・2, 13・1, 13・2 により，f は拡大的かつ擬軌道追跡性をもつ．よって定理 15・3 と T^2 の連結性によって，f は位相推移的である．定理 15・4 を使うと，f が位相混合的であることがわかる．

線形空間 X の 2 つの点 x, y に対して，$\alpha x+(1-\alpha)y$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ という形の点の全体を x, y の**線分**といい，$\langle x, y\rangle$ で表す．X の部分集合 A が $x, y\in A$ のとき，必ずまた $\langle x, y\rangle\subset A$ を満たすとき，A を**凸集合**であるという．集合 A の点 x が**端点**であるとは，$x=\beta y+(1-\beta)z$ $(0<\beta<1,\ y,\ z\in A)$ と表すことができないときをいう．

定理 24・4 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f に対し，次が成り立つ．

（1） $\mathscr{M}_f(X)\neq\phi$.

（2） $\mathscr{M}_f(X)$ は $\mathscr{M}(X)$ の閉部分集合である．

（3） $\mathscr{M}_f(X)$ は凸集合である．

証明 （1）は定理24・3により明らかである．

（2）の証明：列 $\{\mu_n\}\subset\mathscr{M}_f(X)$ が $\mathscr{M}(X)$ の点 μ に収束するとする．このとき，$\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ を示せばよい．任意の $\xi\in C(X)$ と任意の $n>0$ に対し

$$\int_X \xi\circ f d\mu_n=\int_X \xi d\mu_n=\int_X \xi\circ f^{-1}d\mu_n$$

が成り立つから，$n\to\infty$ として

$$\int_X \xi\circ f d\mu=\int_X \xi d\mu=\int_X \xi\circ f^{-1}d\mu$$

を得る．よって μ は f-不変である．すなわち $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$.

（3）の証明：$\mu,\nu\in\mathscr{M}_f(X)$ と $0<t<1$ なる t に対し

$$\tau(B)=t\mu(B)+(1-t)\nu(B)\quad(B\in\mathscr{B})$$

とおくと，τ は Borel 確率測度で，f-不変である．よって $\tau\in\mathscr{M}_f(X)$ である．すなわち $\mathscr{M}_f(X)$ は凸集合である．

定理 24・5 $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ とする．μ が $\mathscr{M}_f(X)$ の端点であるための必要十分条件は μ が f のエルゴード的確率測度であることである．

証明 μ は f のエルゴード的確率測度ではないと仮定しよう．すなわち，$f^{-1}(E)=E$ かつ $0<\mu(E)<1$ を満たす Borel 集合 E が存在するとしよう．任意の $B\in\mathscr{B}$ に対し

$$\mu_1(B)=\mu(B\cap E)/\mu(E),\quad \mu_2(B)=\mu(B\cap(X\setminus E))/\mu(E)$$

とおくと，μ_1 と μ_2 は f-不変 Borel 確率測度である．よって，$\mu_1,\mu_2\in\mathscr{M}_f(X)$ である．明らかに $\mu_1\neq\mu_2$ で

$$\mu(B)=\mu(E)\mu_1(B)+(1-\mu(E))\mu_2(B)$$

と表されるから，μ は $\mathscr{M}_f(X)$ の端点ではない．

逆に，μ が f のエルゴード的確率測度で，ある $\mu_1,\mu_2\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し

$$\mu=t\mu_1+(1-t)\mu_2\quad(0<t<1)$$

と表されたとしよう．このとき，μ_1 は μ に関して絶対連続（$\mu(E)=0\Rightarrow\mu_1(E)=0$）であるから，Radon-Nikodym の定理により，$\mathscr{B}$-可測関数

$$\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)$$

が存在して，すべての $E\in\mathscr{B}$ に対し

$$\mu_1(E)=\int_E \frac{d\mu_1}{d\mu}(x)d\mu$$

とできる．よって

$$\mu_1(E)=\mu_1(f^{-1}E)=\int_{f^{-1}(E)}\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)d\mu=\int_E\frac{d\mu_1}{d\mu}(f^{-1}x)d\mu.$$

E は任意の Borel 集合であるから，定理 20・1 により

$$\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)=\frac{d\mu_1}{d\mu}(f^{-1}x)\mu\text{-}a,e.$$

である．注意 22・3 (3) により，$d\mu_1/d\mu(x)$ はほとんど至るところで定数である．すなわち

$$\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)=k \quad \mu\text{-}a.e.$$

である．

$$1=\mu_1(X)=\int_X kd\mu=k\mu(X)=k$$

から，$d\mu_1/d\mu(x)=1$ μ-$a.e.$ である．よって任意の Borel 集合 E に対し

$$\mu_1(E)=\int_E\frac{d\mu_1}{d\mu}(x)d\mu=\int_E 1d\mu=\mu(E)$$

である．したがって $\mu=\mu_1$，同様に $\mu=\mu_2$ となり，μ は端点である．

コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像を f とする．X の点 x が $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し**準生成的**であるとは，自然数の増大列 N_k が存在して，すべての $\xi\in C(X)$ に対し

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\sum_{i=0}^{N_k-1}\xi(f^jx)=\int_X \xi d\mu$$

が成り立つときをいう．特に

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\xi(f^jx)$$

が収束するとき，その極限を $\xi^*(x)$ で表す．このとき，すべての $\xi\in C(X)$ に対し

$$\xi^*(x)=\int_X \xi d\mu$$

が成り立つならば，点 x を μ に対し**生成的**であるという．

点 $x\in X$ がある Borel 確率測度に対し生成的であるとき，点 x を f に関して**準正則**であるといい，すべての準正則な点の集合を $Q(f)$ で表す．

点 x が $Q(f)$ に属するための必要十分条件は，すべての $\xi\in C(X)$ に対し，$\xi^*(x)$ が存在することである．この場合，定理 23・5 によって線形写像 $\xi\mapsto\xi^*(x)$ は f-不変 Borel 確率測度 μ_x に対応する．よって，点 x は μ_x に対して生成的である．

一般に対応 $x\mapsto\mu_x$ は $Q(f)$ から $\mathscr{M}_f(X)$ への写像を定義するが，単射でも全射でもない．

f-不変 Borel 確率測度 μ に対して，生成的である $Q(f)$ の点の集合を G_μ で表すとき，$Q(f)$ は $G_\mu(\mu\in\mathscr{M}_f(X))$ の和集合である．ところで，G_μ は互いに共通部分をもたない（このことは定理 23・2 より明らかである）．

定理 24・6

(1) $Q(f)$ は Borel 集合である．

(2) 任意の $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し，$\mu(Q(f))=1$ である．

証明 $\xi\in C(X)$ と $N>0$ に対し

$$\xi^N=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\xi\circ f^j$$

とおき

$$Q_\xi=\{x\in X:\lim_{N\to\infty}\xi^N(x)=\xi^*(x)\text{ が存在する}\}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned}Q_\xi&=\{x\in X:\{\xi^N(x)\}\text{ は Cauchy 列}\}\\&=\bigcap_{k\geqq 1}\bigcup_{l\geqq 1}\bigcap_{N\geqq l}\bigcap_{M\geqq l}\{x\in X:|\xi^N(x)-\xi^M(x)|<1/k\}\end{aligned}$$

が成り立つ．$\{x\in X:|\xi^N(x)-\xi^M(x)|<1/k\}$ は開集合であるから，Q_ξ は Borel 集合である．

Birkhoff のエルゴード定理によって，任意の $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し

$$\mu(Q_\xi)=1$$

が成り立つ．X はコンパクト距離空間であるから，$C(X)$ で稠密な可算集合 $\{\xi_n : n \geqq 1\}$ が存在する．このとき

$$Q(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_{\xi_n}$$

が成り立つ．よって $Q(f)$ は Borel 集合で，すべての $\mu \in \mathscr{M}_f(X)$ に対し $\mu(Q(f)) = 1$ である．

点 $x \in X$ は周期 p をもつ f の周期点とする（周期は最小周期を意味する），点列 $x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x)$ の各点で $1/p$ の値をとる確率測度を μ_x としよう．実際に，μ_x は次のように定義される．δ_y は**ディラック測度**，すなわち

$$\delta_y(B) = \begin{cases} 1 & y \in B \\ 0 & y \notin B \end{cases} \quad (B \text{ は任意の Borel 集合})$$

とする．このとき μ_x は

$$\mu_x = \sum_{k=0}^{p-1} \delta_{f^k(x)}(x)/p$$

によって定義されている．

μ_x は f-不変 Borel 確率測度である．f は μ_x に関してエルゴード的である．このように周期点によって構成される Borel 確率測度の全体を $E(f)$ で表す．明らかに $E(f) \subset \mathscr{M}_f(X)$ である．

定理 24·7 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f が明記性をもてば，$E(f)$ はコンパクト距離空間 $(\mathscr{M}_f(X), D)$ の稠密な集合である．

証明 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $\mu \in \mathscr{M}_f(X)$，に対し，$U_\varepsilon(\mu)$ を μ の ε-開球とする．このとき距離関数 D の定義から，$C(X)$ のある有限集合 F が存在して

$$U(\mu) = \left\{ \nu \in \mathscr{M}_f(X) : \left| \int_X \xi d\mu - \int_X \xi d\nu \right| < \varepsilon, \xi \in F \right\}$$

は $U_\varepsilon(\mu)$ に含まれるようにできる．複雑さをさけるために，F の各 ξ のノルムは $\|\xi\| \leqq 1$ であると仮定しよう．定理の結論を得るために

$$U(\mu) \cap E(f) \neq \phi$$

を示せばよい．

自然数 N は十分大きいとしよう．このとき任意の $\xi \in F$ と任意の $x \in Q(f)$

に対し

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\xi(f^i x)-\xi^*(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

とできる．ここに $\xi^*(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)$ である．実際に，$x\in Q(f)$ であるからこのような $\xi^*(x)$ は存在する．Birkhoff のエルゴード定理と定理 24・6(2)によって

$$\int_{Q(f)}\xi^* d\mu=\int_{Q(f)}\xi d\mu$$

が成り立つ．

$$A=\sup\{|\xi^*(x)| : x\in Q(f), \xi\in F\}$$

とおく．明らかに $A<\infty$ である．ここで $j=1,2,\cdots,[8A/\varepsilon]+1$ に対し

$$Q_j(\xi)=\left\{x\in Q(f) : -A+\frac{(j-1)\varepsilon}{4}\leqslant\xi^*(x)<-A+\frac{j\varepsilon}{4}\right\}$$

とおく（[ ] はガウス記号を表している），$Q_j(\xi)$ は Borel 集合で

$$\{Q_1(\xi),\cdots,Q_{[8A/\varepsilon]+1}(\xi)\}=\alpha_\xi$$

は $Q(f)$ の分割である．F は有限であるから，$\vee_F\alpha_\xi=\{Q_1,\cdots,Q_k\}$ は $Q(f)$ の有限分割である．

$x_j\in Q_j$ に対し，明らかに

$$\left|\int_{Q_j}\xi^* d\mu-\mu(Q_j)\xi^*(x_j)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\mu(Q_j).$$

よって

$$\left|\int_{Q(f)}\xi^* d\mu-\sum_{j=1}^{k}\mu(Q_j)\xi^*(x_j)\right|<\varepsilon/4.$$

ゆえに，すべての $\xi\in F$ に対し

$$\left|\int_{Q(f)}\xi d\mu-\sum_{j=1}^{k}\mu(Q_j)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\xi(f^i x_j)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が十分大きな $N>0$ に対して成り立つ．

任意の $\delta>0$ に対し，$1/m<\delta$ なる十分大ある自然数 m をみつけることができる．このとき $n_1,\cdots,n_k$ が存在して

$$n_j/m\leqslant\mu(Q_j)<(n_j+1)/m\quad(1\leqslant j\leqslant k)$$

が成り立ち，さらに m_j として n_j か n_j+1 を選ぶと

$$|m_j/m-\mu(Q_j)|<\delta,\ \sum_{j=1}^{k} m_j=m$$

とできる．よって十分小さい $\delta>0$ を選べば

$$\left|\int_{Q(f)}\xi d\mu-\sum_{j=1}^{k}\frac{m_j}{m}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\xi(f^i x_j)\right)\right|<\varepsilon/2 \tag{24·1}$$

が成り立つ．

ここで証明の残りのアイディアを説明しよう．

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{m_j}{m}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\xi(f^i x_j)\right)=\frac{1}{mN}\sum_{j=1}^{k}m_j\sum_{i=0}^{N-1}\xi(f^i x_j)$$
$$=\frac{1}{mN}\Big\{m_1\Big[\xi(x_1)+\cdots+\xi(f^{N-1}x_1)\Big]+m_2\Big[\xi(x_2)+\cdots$$
$$\cdots+\xi(f^{N-1}x_2)\Big]+\cdots+m_k\Big[\xi(x_k)+\cdots+\xi(f^{N-1}x_k)\Big]\Big\}$$

であるから，次の点列

$$\{x_1, f(x_1), \cdots, f^{N-1}(x_1)\}$$

を m_1 回通過し，次に

$$\{x_2, f(x_2), \cdots, f^{N-1}(x_2)\}$$

を m_2 回通過し，この仕方をくりかえし最後に

$$\{x_k, f(x_k), \cdots, f^{N-1}(x_k)\}$$

を m_k 回通過する点列を $\{u_n : 1\leqslant n\leqslant mN\}$ とすれば，(24·1) により

$$\left|\int_{Q(f)}\xi d\mu-\frac{1}{mN}\sum_{n=1}^{mN}\xi(u_n)\right|<\varepsilon/2\quad(\xi\in F) \tag{24·2}$$

が成り立つ．

F は有限で各 $\xi\in F$ は連続であるから

$$d(x, y)<\delta\ \Rightarrow\ \max\{|\xi(x)-\xi(y)| : \xi\in F\}<\varepsilon/4$$

となるように $\delta>0$ を選ぶことができる．このとき

$$d(f^n(z), u_n)<\delta\quad(n\in\boldsymbol{Z})$$

を満たす周期 mN の周期点 $z\in X$ が存在したと仮定すると (24·2) より

$$\left|\int_{Q(f)}\xi d\mu-\frac{1}{mN}\sum_{i=1}^{mN}\xi(f^i z)\right|<3\varepsilon/4 \tag{24·3}$$

とできる．しかし一般にはこのような周期点 z は存在しない．ここで明記性を利用して，上の周期点と似た挙動を示す点 y をみつけよう．

$M=M(\delta)$ は明記性の定義にあらわれる自然数とし

$$t=0, 1, \cdots, m_1+m_2+\cdots+m_k-1$$

に対して

$$a_t=t(N+M-1),\quad b_t=t(N+M-1)+N-1$$

を定義し

$$\overline{m}_0=0,\quad \overline{m}_1=m_1,\quad \overline{m}_2=m_1+m_2, \cdots, \overline{m}_k=m_1+\cdots+m_k$$

とおく．上の点列 $\{x_1, \cdots, x_k\}$ に対して

$$\overline{m}_{j-1}\leqslant t<\overline{m}_j \quad (1\leqslant j\leqslant k) \quad \Rightarrow \quad y_t=x_j$$

とすると，明記性によって周期 $p=m(N+M-1)$ の周期点 $y\in X$ が存在して

$$d(f^{a_t+j}(y), f^j(y_t))\leqslant\delta \quad (0\leqslant j\leqslant b_t-a_t, t=0, \cdots, m-1)$$

とできる．点列 $\{y, f(y), \cdots, f^{p-1}(y)\}$ の各点 $f^i(y)$ で $1/p$ の値をもつ f-不変 Borel 確率測度を μ_y で表す．このとき

$$\int_X \xi d\mu_y=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\xi(f^i y)$$

が成り立つ．

$$E=\boldsymbol{Z}\cap\bigcup_{i=0}^{m-1}[a_i, b_i]$$

とすると，E は mN 個の点をもつ．よって (24・3) のように

$$\left|\int_X \xi d\mu-\frac{1}{mN}\sum_{i\in E}\xi(f^i y)\right|<\frac{3\varepsilon}{4} \tag{24・4}$$

を得る．しかし $\sum_{i=1}^{p}\xi(f^i y)$ は $\sum_{i\in E}\xi(f^i y)$ に mM の項をプラスしたものである．$\|\xi\|\leqslant 1$ であるから

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\xi(f^i y)-\frac{1}{mN}\sum_{i\in E}\xi(f^i y)\right|<2MN^{-1} \tag{24・5}$$

であることがわかる．N が十分大きければ，$2M/N<\varepsilon/4$ とできるから (24・4) と (24・5) より

$$\left|\int_X \xi d\mu-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\xi(f^i y)\right|<\varepsilon$$

がすべての $\xi\in F$ で成り立つ．よって $\mu_y\in U(\mu)$ が示された．

§ 25 エルゴード性と位相的性質

同相写像 f が Borel 確率測度に関してエルゴード的であるとき，f は位相的にどんな挙動を示すであろうか．

定理 25・1　f はコンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像とし，μ は X の上の f-不変 Borel 確率測度とする．もし μ は空でない開集合の測度を正とする測度で，f は μ に関してエルゴード的であるとする．このとき

$$\mu(\{x\in X : \overline{O_f(x)}=X\})=1$$

が成り立つ．

証明　$\{U_1,U_2,\cdots\}$ はXの位相の可算基とする．$E_n=\bigcap_{m=-\infty}^{\infty}f^m(X\setminus U_n)$ $(n\geqq 1)$ とおくと，明らかに $f(E_n)=E_n$ で，各 E_n は Borel 集合である．定理 5・1 の証明によって

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\{x\in X:\overline{O_f(x)}\neq X\}$$

である．f はエルゴード的であるから，$\mu(E_n)=0$ あるいは $\mu(E_n)=1$ である．各 U_n は開集合であるから，$\mu(U_n)>0$. だから $\mu(E_n{}^c)>0$. ゆえに $\mu(\{x\in X:\overline{O_f(x)}=X\})=1$ である．

同相写像 f に対して，$\mathcal{M}_f(X)$ がただ1点からなる集合であれば，f は**一意エルゴード的**であるという．

注意 25・1　(1)　f が一意エルゴード的であれば，f はエルゴード的である．

証明　定理 24・5 から明らかである．

(2)　恒等写像 id が一意エルゴード的であれば，コンパクト距離空間は1点集合である．

証明　$\mathcal{M}(X)$ に属するすべての確率測度は id を不変にする測度である．よって，$\mathcal{M}(X)=\mathcal{M}_{id}(X)$ は1点からなる集合である．いま，X は2点以上からなる空間とする．1点の集合 $\{x\}$ は Borel 集合であるから，$\mu(\{x\})=1/3$, $\mu(X\setminus\{x\})=2/3$ とおくと，μ は X の上の Borel 確率測度である．$x\neq y$ なる点 y に対し，$\nu(\{y\})=1/2$, $\nu(X\setminus\{y\})=1/2$ とおくと，ν は $\nu\neq\mu$ を満たす Borel 確率測度である．しかし，id は一意エルゴード的であるから，X は1点集合でなくてはならない．

定理 25・2　f は一意エルゴード的であるとする．このとき，f が極小的であ

るための必要十分条件は，空でない開集合 U に対し $\mu(U)>0$ を満たす Borel 確率測度 μ が存在することである．

証明 f は極小的で，開集合 $U\neq\phi$ に対し，$\mu(U)=0$ とする．このとき，$X=\bigcup\{f^n(U): n\in \boldsymbol{Z}\}$ が成り立つから，$\mu(X)=0$ となって，$\mu(X)=1$ に矛盾する．

逆に，任意の開集合 $U\neq\phi$ に対し，$\mu(U)>0$ を満たす μ が存在するとき，f が極小的でなければ，$f(F)=F\subsetneq X$ なる閉集合 $F\neq\phi$ が存在する．F への制限 $f_{|F}$ は F の上に $f_{|F}$-不変 Borel 確率測度 μ_F をもつ (Krylov-Bogolioubov の定理)．ここで任意の Borel 集合 $B\in\mathscr{B}$ に対し

$$\mu'(B)=\mu_F(F\cap B)$$

とおくと，μ' は X の上の f-不変 Borel 確率測度で，かつ $\mu'(X\setminus F)=0$ である．だから $\mu'\neq\mu$ である．しかし f は一意エルゴード的であることに反する．

注意 25·2 $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の上の推移写像 σ が一意エルゴード的であれば，$k=1$ である．

証明 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ は加法群である．自然数 k の倍数全体の集合 H は $\boldsymbol{Z}$ の部分群であるから，剰余群 $\boldsymbol{Z}/H$ は位数 k の可換群である．($\boldsymbol{Z}/H=\{H, 1+H, \cdots, (k-1)+H\}$)

Y_k は有限集合 $\{0, 1, \cdots, k-1\}$ であった．よって，$Y_k=\boldsymbol{Z}/H$ であると考えることができる．$x=(x_i)$，$y=(y_i)\in Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ に対し

$$x+y=(x_i+y_i),\quad -x=(-x_i)$$

によって $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ に群の構造を導入することができる．この群の演算は $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の位相に関して連続であることが容易に示される．したがって，$Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ はコンパクト位相可換群である．$Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の上の推移写像 σ は自己同型写像であることは簡単に確かめられる．

ゆえに $Y_k{}^{\boldsymbol{Z}}$ の上に σ-不変 Haar 確率測度が存在する (注意 24·4)，ところで σ は一意エルゴード的であるから，定理 25·2 によって σ は極小的である．ここで 注意 4·6 (2) を使うと $k=1$ が得られる．

定理 25·3 コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 f に対して，次は互いに同値である．

(1) 任意の $\xi\in C(X)$ に対し，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\xi(f^i x)$ はある数に一様収束する．

（2）　任意の $\xi\in C(X)$ に対し，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)$ は各点 x ごとにある数に収束する．

（3）　$\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ が存在して，任意の $x\in X$ に対し

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\xi(f^i x)\to\int_X \xi d\mu \quad (\xi\in C(x))$$

が成り立つ．すなわち，X の各点は準正則 $X=Q(f)$ である．

（4）　f は一意エルゴード的である．

証明　（1）⇒（2）は明らかである．

（2）⇒（3）の証明：X に属する点 x を固定して，線形写像 $K: C(X)\to \boldsymbol{R}$ を

$$K(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)$$

によって定義すると，$K(1)=1$, $\xi\geqslant 0$ ならば $K(\xi)\geqslant 0$ が成り立つ．さらに

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)\right|\leqslant\|\xi\|$$

を満たす．よって $\|K(\xi)\|\leqslant\|\xi\|$ $(\xi\in C(X))$ である．だから，K は連続である．定理23•5により，Borel 確率測度 μ が存在して

$$K(\xi)=\int_X \xi d\mu \quad (\xi\in C(X)$$

とできる．$K(\xi\circ f)=K(\xi)=K(\xi\circ f^{-1})$ $(\xi\in C(X))$ から

$$\int_X \xi\circ f d\mu=\int_X \xi d\mu=\int_X \xi\circ f^{-1}d\mu.$$

ゆえに $\mu\circ f^{-1}=\mu=\mu\circ f^{-1}$ である．すなわち $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$．X の各点は準正則である．

（3）⇒（4）の証明：任意の $x\in X$ に対し，仮定によって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)=\int_X \xi d\mu \quad (\xi\in C(X))$$

である．よって任意の $\nu\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し

$$\int_X \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x)d\nu=\int_X\left\{\int_X \xi d\mu\right\}d\nu=\int_X \xi d\mu$$

である．ここで Lebesgue の収束定理を左辺に適用すると

$$\text{左辺}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X \xi(f^i x)d\nu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_X \xi(x)d\nu=\int_X \xi(x)d\nu$$

である．だから

$$\int_X \xi(x)d\nu=\int_X \xi(x)d\mu \quad (\xi\in C(X))$$

が成り立つ．定理 23・2 により，$\nu=\mu$ を得る．すなわち $\mathscr{M}_f(X)$ は1点集合である．

（4）⇒（1）の証明：（1）を否定しよう．このとき $\xi\in C(X)$ と $\varepsilon>0$ が存在して任意の $N>0$ に対し $n\geqslant N$ なる n と $x_n\in X$ が存在して

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x_n)-\int_X \xi d\mu\right|\geqslant\varepsilon$$

とできる．点 x_n を固定して連続線形写像 $K_n: C(X)\to \boldsymbol{R}$ を

$$K_n(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi(f^i x_n)$$

によって定義する．定理 23・5 によって Borel 確率測度 μ_n が存在して

$$K_n(\xi)=\int_X \xi d\mu_n \quad (\xi\in C(X))$$

とできる．Borel 確率測度の列 $\{\mu_n\}$ から，部分列 $\{\mu_{n_i}\}$ を選びある Borel 確率測度 ν に収束するようにできる（定理 24・2），すなわち

$$K_{n_i}(\xi)\to\int_X \xi d\nu \quad (\xi\in C(X))$$

である．任意の $\xi\in C(X)$ に対し

$$\left|K_{n_i}(\xi\circ f)-K_{n_i}(\xi)\right|=\frac{1}{n_i}\left|\xi(f^{n_i}x_{n_i})-\xi(x_{n_i})\right|\leqslant 2\|\xi\|/n_i.$$

ゆえに

$$\int_X \xi(fx)d\nu=\int_X \xi(x)d\nu.$$

だから $\nu\circ f^{-1}=\nu$．同様にして $\nu\circ f=\nu$ が求まる．よって $\nu\in\mathscr{M}_f(X)$ である．しかし仮定より

$$\left|\int_X \xi d\mu-\int_X \xi d\nu\right|\geqslant\varepsilon.$$

よって $\mu\neq\nu$ である．これは f が一意エルゴード的であることに反する．

位相的性質である擬軌道追跡性は，ある種の Borel 確率測度に次の定理のような影響を与えている．

定理 25・4　コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f の非遊走集合を $\Omega(f)$ とする．$f:X\to X$ が擬軌道追跡性をもてば，$\Omega(f)$ の空でない開集合のすべてを正の測度にもつ f-不変 Borel 確率測度が存在する．

証明　$U_1,U_2\cdots$ を $\Omega(f)$ の位相（相対位相）の基底とする．任意の $j\geqslant 1$ に対し，V を U_j に含まれる内点をもつ閉集合とし，$V\supset U_\varepsilon(x)$ なる ε に対し，十分小さな $\delta>0(\delta<\varepsilon)$ を擬軌道追跡性の定義にあらわれる実数とする．$U_\delta(x)\subset V$ なる点 x を選ぶ．このとき $\Omega(f)$ は非遊走集合であるから，$z,f^{n_0}(z)\in U_{\delta/2}(x)$ なる $z\in\Omega(f)$ と $n_0>0$ が存在する．

さて $z_{n_0k+i}=f^i(z)$ $(k\in\boldsymbol{Z},0\leqslant i\leqslant n_0-1)$ によって n_0 周期の δ-軌道 $\{z_j\}$ を定義する．$f_{|(\Omega f)}$ は擬軌道追跡性をもつから，$d(f^j(y),z_j)<\varepsilon$ $(j\in\boldsymbol{Z})$ を満たす $y\in\Omega(f)$ が存在する．$m\geqslant 1$ に対し．

$$\mu_m=\sum_{k=0}^{m-1}\delta_{f^k(y)}/m$$

とおく．μ_m は，すべての $m\geqslant 1$ に対し $\mu_m(V)\geqslant\mu_m(U_\varepsilon(x))\geqslant 1/2n_0$ を満たす $\Omega(f)$ の上の Borel 確率測度である．
定理 24・1 によって，$(\mathscr{M}(X),D)$ はコンパクトであるから，適当な部分列 $\{\mu_{m_i}\}$ は Borel 確率測度 $\mu^{(j)}$ に収束する．定理 23・3（2）によって

$$\mu^{(j)}(V)\geqslant\overline{\lim_{i\to\infty}}\,\mu_{m_i}(V)\geqslant 1/2n_0$$

である．よって $\mu^{(j)}(U_j)\geqslant\mu^{(j)}(V)>0$ が成り立つ．

$\mu^{(j)}$ が f-不変であることを示そう．任意の Borel 集合 B に対し

$$\left|\mu_{m_i}(f^{-1}B)-\mu_{m_i}(B)\right|\leqslant\frac{1}{m_i}\sum_{k=0}^{m_i-1}\left|\delta_{f^k(y)}(f^{-1}B)-\delta_{f^k(y)}(B)\right|$$

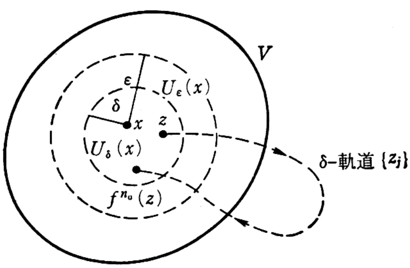


図 8・2

$$(25\cdot1)\qquad =\frac{1}{m_i}\sum_{k=0}^{m_i-1}\left|\delta_{f^{k+1}(y)}(B)-\delta_{f^k(y)}(B)\right| \leqslant 2/m_i,$$

$$|\mu_{m_i}(fB)-\mu_{m_i}(B)|\leqslant 2/m_i$$

である．任意の $\xi\in C(\Omega(f))$ は Borel 可測である．$\xi(x)\geqslant 0$ $(x\in\Omega(f))$ の場合，注意 20·7 によって，任意の $x\in\Omega(f)$ に対して $\xi(x)$ は Borel 可測単純関数列 $\xi_n(x)=\sum_{i=0}^{n2^n}a_i1_{B_i}(x)$ が存在してその極限で表される．よって $\xi(fx)$ は $\sum_{i=0}^{n2^n}a_i1_{f^{-1}(B_i)}(x)$ の極限で，$\xi(f^{-1}x)$ は $\sum_{i=0}^{n2^n}a_i1_{f(B_i)}(x)$ の極限で表される．一般の連続関数は正，負の部分に分解して適当な単純関数列の極限で表すことができる．

$\xi\geqslant 0$ の場合，十分大きな n に対し $0\leqslant\xi(x)-\xi_n(x)\leqslant 1/2^n(x\in\Omega(f))$ である．ゆえに (25·1) と三角不等式を使うと

$$\left|\int\xi\circ f\,d\mu_{m_i}-\int\xi\,d\mu_{m_i}\right|\leqslant 2/2^n+2/m_i\left(\sum_{k=1}^{n2^n}k/2^n\right).$$

ここで n を固定して，$i\to\infty$ とすると

$$\lim_{i\to\infty}\left|\int\xi\circ f\,d\mu_{m_i}-\int\xi\circ d\mu_{m_i}\right|=\left|\int\xi\circ d\mu^{(j)}-\int\xi\,d\mu^{(j)}\right|\leqslant 1/2^{n-1}.$$

次に $n\to\infty$ とすれば，$\int\xi\circ f\,d\mu^{(j)}=\int\xi\,d\mu^{(j)}$ を得る．同様にして $\int\xi\circ f^{-1}d\mu^{(j)}=\int\xi\,d\mu^{(j)}$ が求まる．定理 23·2 を使うと

$$\mu^{(j)}(f^{-1}B)=\mu^{(j)}(fB)=\mu^{(j)}(B)\quad (B \text{ は Borel 集合})$$

を得る．

Borel 確率測度 $\mu^{(j)}$ は開集合 U_j に依存して構成されている．ここで

$$\mu(B)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu^{(j)}(B)/2^j$$

とおくと，μ は f-不変確率測度で，$\mu(U_j)>0$ $(j\geqslant 1)$ を満たすから，μ が定理で求めるものである．

§ 26 確率測度と力学的性質

距離空間の上の同相写像の擬軌道追跡性とその存在について調べてきた．ここでは確率測度を使って擬軌道追跡性を満たさない同相写像の存在を調べよう．

定理 26・1 コンパクト距離空間 (X,d) は連結で1点集合でないとし，$f:X\to X$ は同相写像とする．もし f がディスタルであれば，f は擬軌道追跡性を満たさない．

まず補題を準備しよう．

補題 26・1 同相写像 f が擬軌道追跡性をもてば，任意の $\varepsilon>0$ と任意の $x\in\Omega(f)$ に対し，$y\in X$ と $k=k(x,\varepsilon)>0$ が存在して，$\overline{O_{f^k}(y)}\subset U_\varepsilon(x)$ とできる．

証明 $\varepsilon/3>0$ に対し，$\delta>0$ は擬軌道追跡性の定義にあらわれる実数とする．$0<\delta<\varepsilon$ を満たすように δ を選ぶことができることに注意する．$x\in\Omega(f)$ であるから，$z\in X$ と $k>0$ が存在して，$z, f^k(z)\in U_{\delta/2}(x)$ とできる．さて

$$z_{nk+i}=f^i(z)\ (n\in\boldsymbol{Z},\ 0\leqslant i<k)$$

とおくと

$$\{z_i : i\in\boldsymbol{Z}\}=\{\cdots, z, f(z), \cdots, f^{k-1}(z), z, \cdots\}$$

は k-周期の δ-軌道である．ゆえに，$d(f^i(y), z_i)<\varepsilon/3$ $(i\in\boldsymbol{Z})$ なる $y\in X$ が存在する．特に $d(f^{nk}(y), z_{nk})<\varepsilon/3$. よって $d(f^{nk}(y), x)<5\varepsilon/6$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. すなわち $\overline{O_{f^k}(y)}\subset U_\varepsilon(x)$ である．

定理 26・1 の証明：f は擬軌道追跡性を満たすと仮定する．X の直径を l とし，$\varepsilon=l/9$ とおく．補題 26・1 によって $y_0\in\Omega(f)$ に対し

$$\overline{O_{f^k}(y)}\subset U_\varepsilon(y_0)$$

となる $y\in X$ と $k>0$ が存在する．簡単にするために，$g=f^k$ とおく．このとき定理 11・1 によって，$g: X\to X$ は擬軌道追跡性をもつ．さらに g はディスタルであることは簡単に確かめられる．$\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ $(\delta\leqslant\varepsilon)$ は g についての擬軌道追跡性の定義にあらわれる実数とする．X はコンパクトかつ連結であるから

$$d(p_i, p_{i+1})<\delta/2\quad(1\leqslant i\leqslant N-1),\quad \bigcup_{i=1}^{N} U_\delta(p_i)=X$$

を満たす有限点列 $p_1=y, p_2, \cdots p_3, \cdots, p_N$ を選ぶことができる．X の各点は概周期点であるから

$$d(p_i, g^{c(i)}(p_i))<\delta/2$$

なる自然数 $c(i)$ が存在する．点列 $\{x_i : i\in\boldsymbol{Z}\}$ を

$$x_i=g^i(y)\qquad(i\leqslant 0)$$
$$x_i=g^i(y)\qquad(0\leqslant i\leqslant c(1)-1)$$
$$x_{c(1)+i}=g^i(p_2)\qquad(0\leqslant i\leqslant c(2)-1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{c(1)+\cdots+c(N-1)+i}=g^i(p_N)\qquad(0\leqslant i\leqslant c(N)-1)$$
$$x_{c(2)+\cdots+c(N)+i}=g^i(p_{N-1})\qquad(0\leqslant i\leqslant c(N-1)-1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{c(1)+2c(2)+\cdots+2c(N-1)+c(N)+i}=g^i(y)\qquad(i\geqslant 0)$$

によって定義する．明らかに，$\{x_i\}$ は δ-軌道かつ δ-稠密（任意の $y\in X$ に対し，$d(y,x_i)<\delta$ となる $x_i\in\{x_i\}$ が存在する）である．

g は擬軌道追跡性を満たすから，ε-追跡点 $z\in X$ が存在して

$$d(g^i(z),x_i)<\varepsilon\quad(i\in\boldsymbol{Z}).$$

よって任意の $w\in X$ に対し，$w'\in O_g(z)$ が存在して

$$d(w,w')<2\varepsilon.$$

特に

$$d(g^i(z),g^i(p_1))=d(g^i(z),g^i(y))<\varepsilon\qquad(i\leqslant 0),$$
$$d(g^{i+c}(z),g^i(p_1))=d(g^{i+c}(z),g^i(y))<\varepsilon\quad(i\geqslant 0).$$

ここに

$$c=c(1)+2\sum_{i=2}^{N-1}c(i)+c(N)$$

である．したがって

$$g^i(z)\in U_\varepsilon(g^iz)\subset\bigcup\{U_\varepsilon(h):h\in\overline{O_g(y)}\}=U_\varepsilon(\overline{O_g(y)})\quad(i\leqslant 0),$$
$$g^{i+c}(z)\in U_\varepsilon(g^i(y))\subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)})\quad(i\geqslant 0).$$

ゆえに，半軌道 $O_g{}^-(z)=\{g^i(z):i\leqslant 0\}$ と $O_g{}^+(z)=\{g^i(z):i\geqslant 0\}$ に対し

$$g(\overline{O_g{}^-(z)})\subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)}),\quad g^c(\overline{O_g{}^+(z)})\subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)})$$

を得る．ところで

$$O_g(z)=O_g{}^-(z)\cup O_g{}^+(z)$$

であるから，$\overline{O_g{}^-(z)}$ または $\overline{O_g{}^+(z)}$ のいずれかが $\overline{O_g(z)}$ の中で空でない内点をもつ（Baire の定理）．

g は $\overline{O_g(z)}$ の上の同相写像であるから，定理 24·3 によって g-不変確率測度 μ が $\overline{O_g(z)}$ の上に存在する．$\overline{O_g(z)}$ の上で g は極小的（定理 6·3）であるから，μ は $\overline{O_g(z)}$ の開集合 $U \neq \phi$ を正にもつ．何故ならば，$\bigcup_{-\infty}^{\infty} g^i(U)=\overline{O_g(z)}$ であるから，$\overline{O_g(z)}$ は有限個で被覆される．すなわち，$\bigcup_{-k}^{l} g^i(U)=\overline{O_g(z)}$．ゆえに $\mu(\overline{O_g(z)}) \leqq \sum_{-k}^{l} \mu(g^iU)$ であるから，$\mu(U)>0$ である．

いま，$\overline{O_g(z)}$ の中で $\overline{O_g^-(z)}$ は内点をもつとする．このとき

$$\overline{O_g^-(z)}=g(\overline{O_g^-(z)})$$

が成り立つ．仮りに $g^{-1}(\overline{O_g^-(z)} \subsetneqq \overline{O_g^-(z)}$ とする．$V=\bigcap_{k\geqq 1} g^{-k}(\overline{O_g^-(z)})$ が $\overline{O_g(z)}$ の中で内点をもてば，$g^{-j}(z) \in V$ となる $j \geqq 0$ が存在し，V の定義により $g(V) \subset V$ である．ゆえに $\overline{O_f(z)} \subset V$．だから $g^{-1}(\overline{O_g^-(z)})=\overline{O_g^-(z)}$ となって仮定に反する．V が $\overline{O_g(z)}$ の中で内点を含まない場合には，$\overline{O_g^-(z)} \setminus V$ は $\overline{O_g(z)}$ で内点をもつから

$$\mu(\overline{O_g^-(z)} \setminus V)>0$$

である．

$$W=\overline{O_g^-(z)} \setminus g^{-1}(\overline{O_g^-(z)})$$

とおくと

$$\overline{O_g^-(z)}=\bigcup_{k\geqq 0} g^{-k}(W) \cup V$$

であるから，$\mu(W)>0$．よって $\mu(\overline{O_g^-(z)}) \leqq 1$ に矛盾する．

$\overline{O_g(z)}$ の中で $\overline{O_g^+(z)}$ が内点をもてば，$g(\overline{O_g^+(z)})=\overline{O_g^+(z)}$ である．いずれの場合も

$$\overline{O_g(z)}=\overline{O_g^-(z)} \text{ あるいは } \overline{O_g(z)}=\overline{O_g^+(z)}$$

のいずれかが成り立つ．よって

$$\overline{O_g(z)} \subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)}).$$

$\overline{O_g(y)} \subset U_\varepsilon(y_0)$ であるから

$$\overline{O_g(z)} \subset U_\varepsilon(\overline{O_g(y)}) \subset U_{2\varepsilon}(y_0).$$

$\{x_i\}$ は δ-稠密で，$d(g^i(z), x_i)<\varepsilon$ $(i \in \boldsymbol{Z})$ であるから

$$\max\{d(\overline{O_g(z)}, x) : x \in X\} \leqq 2\varepsilon$$

が成り立つ．よって，$X = U_{2\varepsilon}(\overline{O_g(z)}) = U_{4\varepsilon}(y_0)$ である．すなわち，X の直径 l は8ε 以下である．これは $\varepsilon = l/9$ に矛盾する．

次の定理は Borel 確率測度を使わないで証明できる．

定理 26·2 f はコンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像とする．X は連結で，1点集合でないとする．このとき $f : X \to X$ が極小的ならば，f は擬軌道追跡性をもたない．

証明 X の直径を l とし，$\varepsilon = l/3$ とおく．f は擬軌道追跡性を満たすと仮定する．補題 26·1 によって，$x \in \Omega(f)$ に対し $y \in X$ と $k > 0$ が存在して，$\overline{O_{f^k}(y)} \subset U_\varepsilon(x)$ が成り立つ．$X = \overline{O_{f^k}(y)} \cup \overline{O_{f^k}(fy)} \cup \cdots \cup \overline{O_{f^k}(f^{k-1}y)}$ であって，X の連結性と f の極小性から，$\overline{O_{f^k}(y)} = X$ が求まる．ゆえに $l \leqq 2\varepsilon$ となって矛盾を得る．

第9章　Kolmogorov-Sinai エントロピー

この章では Shannon の情報理論で用いられるエントロピーのアナロジーとして Kolmogorov および Sinai が導入した確率論的エントロピーを考察する．§27 は確率空間の保測写像に対するエントロピーとその基本的性質を調べる．§28 では，トーラスの上の自己同型写像 f に対して，Lebesgue 測度は f-不変であって，f のエントロピーはその位相的エントロピーと一致することを示す．さらに p 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^p$ の上の線形写像のエントロピーを計算する．

最後に§29 では，コンパクト距離空間の上の拡大的で明記性をもつ同相写像 f に対して，適当な f-不変 Borel 確率測度があって，これに関する f のエントロピーはその位相的エントロピーと一致すること，およびこのような測度に関して f はエルゴード的であることを示す．(しかし，このような f が Bernoulli 的である Borel 確率測度の存在はわかってない)．そして，拡大的な同相写像 $f: X \to X$ が与えられたとき，f-不変な Borel 確率測度 μ に対して，f の μ に関するエントロピー $h_\mu(f)$ を対応させる関数は上半連続であることを示す．

§27　確率測度によるエントロピー

確率論的エントロピーを定義するまえに，熱力学のエントロピーを簡単に説明しよう．左右にしきられた器の中にそれぞれ種類の違う気体A，Bを入れその温度，圧力を等しくしておく．熱の出入のないこの体系において，しきりを取り去るか，このしきりに穴をあけると，両方の気体がしだいに混合し，一様に混じり合って変化は止む．これは各々の気体が別々にその体積を増加しようとする傾向をもつ結果混じり合うと考えられている．すなわち気体分子は秩序正しい状態から無秩序の状態に移ろうとする傾向をもつということである．このような現象進行の方向を決める量が熱力学のエントロピーである．

この体系を力学的立場で考えると，つねにエネルギーが極小の状態になろうとする，すなわち安定なつり合いに達しようとする．エントロピーの立場でいえば，なるべく大きな状態(秩序のない無秩序の状態)になろうとすることである．

エントロピーが最大になったとき，体系は安定に達するが，分子の運動は無秩序な状態に達し，これ以上状態変化を起こさない．これを体系の平衡状態という．

いまから Kolmogorov-Sinai による確率測度を使ったエントロピーを定義し，§ 29 で最大エントロピーとの関係を述べる．

確率空間 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ の保測写像に対して，Kolmogorov-Sinai のエントロピーがある．このエントロピーの定義を与え，いくつかの重要な性質を調べよう．

有限集合族 $\mathscr{C}=\{C_1, \cdots, C_k\}$ が X の**分割**であるとは

$$C_i \in \mathscr{F} \quad (1 \leqslant i \leqslant k), \qquad C_i \cap C_j = \phi \quad (i \neq j), \qquad \bigcup_{i=1}^{k} C_i = X$$

を満たすときをいう．

X の有限分割 $\mathscr{C}=\{C_i\}$ が与えられたとき，$\mathscr{C}$ の各元 C_i の測度は正であると考えてよい．しかし一般に有限分割といった場合は測度 0 の集合を元にもつ場合がある．有限分割 $\mathscr{C}$ の1つの量

$$H_\mu(\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^{k} -\mu(C_i) \log \mu(C_i)$$

を定義する．($\log x$ の底は 2 とし $0 \log 0 = 0$ とする)．明らかに $H_\mu(\mathscr{C}) \geqslant 0$ である．

次の定理はエントロピーのいろいろな性質を求めるときに使われる．

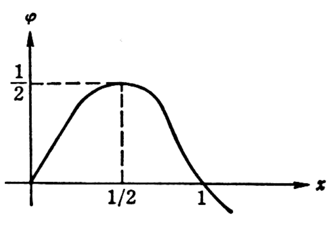


図 9·1

定理 27·1　連続関数 $\varphi : [0, 1) \to \boldsymbol{R}$ は

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ -x \log x & (x \neq 0) \end{cases}$$

によって定義されているとする．このとき任意の $k>0$ と $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$ なる正の実数 a_i に対し

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\Big) \geqslant \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi(x_i) \quad (x_i \in [0, 1))$$

が成り立つ．

証明　$\varphi(x)$ は $[0, \infty)$ の上の関数と考える．$\varphi(x)$ を微分すると，$\varphi'(x) = -\log e - \log x$ である．$(0, \infty)$ の上で $\varphi'(x)$ を微分すると，$\varphi''(x) = -\log e/x < 0$ である．2点 x, y は $[0, \infty)$ に属し，α, β は $\alpha+\beta=1$ を満たす正の実数とする

と

$$\varphi(\alpha x+\beta y)\geqslant\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(x)$$

が成り立つことを示そう．

$y>x$ としてよい．このとき平均値の定理により

$$\alpha x+\beta y<z<y$$

となる z が存在して

$$\varphi(y)-\varphi(\alpha x+\beta y)=\varphi'(z)\alpha(y-x)$$

とでき，さらに

$$x<w<dx+\beta y$$

となる w が存在して

$$\varphi(\alpha x+\beta y)-\varphi(x)=\varphi'(w)\beta(y-x)$$

とできる．$(0,\infty)$ の上で $\varphi''(x)\leqslant 0$ である．だから $\varphi'(z)<\varphi'(w)$．よって

$$\begin{aligned}\beta\{\varphi(y)-\varphi(\alpha x+\beta y)\}&=\varphi'(z)\alpha\beta(y-x)\\&\leqslant\varphi'(w)\alpha\beta(y-x)\\&=\alpha\{\varphi(\alpha x+\beta y)-\varphi(x)\}.\end{aligned}$$

$x>0, y>0$ のとき，上の不等式から $\varphi(\alpha x+\beta y)\geqslant\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$ が求まる．$x\geqslant 0, y\geqslant 0$ のときは，φ の連続性を使えばよい．あとは数学的帰納法を利用すれば定理が得られる．

有限分割 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ に対して

$$\{C_i\cap D_j : C_i\in\mathscr{C},\ D_j\in\mathscr{D}\}$$

は X の有限分割で，これを $\mathscr{C}\vee\mathscr{D}$ で表す．

注意 27·1　有限分割 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ に対し

（1）　$H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})\leqslant H_\mu(\mathscr{C})+H_\mu(\mathscr{D})$

が成り立つ．

証明　$$\begin{aligned}H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{C})&=\sum_{i,j}-\mu(C_i\cap D_j)\log\mu(C_i\cap D_j)\\&\quad-\sum_i-\mu(C_i)\log\mu(C_i)\\&=\sum_{i,j}-\mu(C_i\cap D_j)\log\frac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\end{aligned}$$

$$=\sum_j\sum_i -\mu(C_i)\left\{\frac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\log\frac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\right\}.$$

いま $a_i=\mu(C_i)$, j を固定して $x_i=\mu(C_i\cap D_j)/\mu(C_i)$ とおき，定理 27·1 を適用すると

$$\sum_i \mu(C_i)\varphi\left(\frac{\mu(C_i\cap D_j)}{\mu(C_i)}\right)\leqslant\varphi(\sum_i \mu(C_i\cap D_j))=\varphi(\mu(D_j))$$

が成り立つ．よって

$$H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{C})\leqslant\sum_j \varphi(\mu(D_j))=H_\mu(\mathscr{D}).$$

（2） 有限分割 $\mathscr{C}=\{C_1,\cdots,C_k\}$ に対し

$$H_\mu(\mathscr{C})\leqslant\log k$$

が成り立つ．

証明　$a_i=1/k$, $x_i=\mu(C_i)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ とおくと

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k\frac{\mu(C_i)}{k}\right)=-\sum_{i=1}^k\frac{\mu(C_i)}{k}\log\sum_{i=1}^k\frac{\mu(C_i)}{k}=-\frac{1}{k}\log\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\log k.$$

ここで定理 27·1 を適用すると

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k\frac{\mu(C_i)}{k}\right)=\frac{1}{k}\log k\geqslant\sum_{i=1}^k\frac{1}{k}\varphi(\mu(C_i))$$

が成り立つ．よって

$$\sum_{i=1}^k\frac{1}{k}\varphi(\mu(C_i))=-\sum_{i=1}^k\frac{1}{k}\mu(C_i)\log\mu(C_i)$$

から

$$-\sum_{i=1}^k\mu(C_i)\log\mu(C_i)\leqslant\log k$$

を得る．

f は確率空間 $(X,\mathscr{F},\mu)$ の上の保測写像 $(\mu(f^{-1}E)=\mu(E),\ E\in\mathscr{F})$ とし，$\mathscr{C}$ は X の有限分割とする（f は単射であることを仮定していない）．このとき $f^{-1}(\mathscr{C})$ も X の有限分割である．よって任意の $n>0$ に対し

$$\mathscr{C}\vee f^{-1}(\mathscr{C})\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\mathscr{C})$$

は X の有限分割であるから

$$a_n=H_\mu(\mathscr{C}\vee f^{-1}(\mathscr{C})\vee\cdots f\vee^{-(n-1)}(\mathscr{C}))$$

とおくと，注意 27・1 (1) によって，$a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, $a_n \geqslant 0$ である．ゆえに定理 17・1 により，$\{a_n/n\}$ は収束する．このとき

$$h_\mu(f, \mathscr{C}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathscr{C} \vee f^{-1}(\mathscr{C}) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathscr{C}))$$

と書き

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\mu(f, \mathscr{C}) : \mathscr{C} \text{ は有限分割}\}$$

を f の**エントロピー**という．

有限分割 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ に対し 1 つの量 $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D})$ を

$$H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) = H_\mu(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) - H_\mu(\mathscr{D})$$

によって定義する．この量はエントロピーの計算に便利である．

注意 27・2 次が成り立つ．

(1) $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) \geqslant 0$

証明

$$H_\mu(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) - H_\mu(\mathscr{D}) = -\sum_i \mu(D_i) \sum_j \frac{\mu(C_j \cap D_i)}{\mu(D_i)} \log \frac{\mu(C_j \cap D_i)}{\mu(D_i)} \geqslant 0.$$

(2) $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) \leqslant H_\mu(\mathscr{C})$

証明

$$H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) = H_\mu(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}) - H_\mu(\mathscr{D}) \leqslant H_\mu(\mathscr{C}) + H_\mu(\mathscr{D}) - H_\mu(\mathscr{D}) = H_\mu(\mathscr{C}).$$

有限分割 $\mathfrak{A}, \beta$ において，測度 0 の集合を除いて $\mathfrak{A}$ が β の細分のとき，単に $\mathfrak{A}$ が, β の**細分**であるという．

定理 27・2 $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathcal{E}$ は X の有限分割とする．このとき

(1) $\mathscr{D}$ は $\mathcal{E}$ の細分 ($\mathcal{E} \leqslant \mathscr{D}$) $\Rightarrow$ $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) \leqslant H_\mu(\mathscr{C}|\mathcal{E})$.

(2) $\mathscr{C} \leqslant \mathscr{D}$ $\Rightarrow$ $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) = 0$.

(3) $H_\mu(\mathscr{C} \vee \mathscr{D}|\mathcal{E}) \leqslant H_\mu(\mathscr{C}|\mathcal{E}) + H_\mu(\mathscr{D}|\mathcal{E})$.

(4) $H_\mu(\mathscr{C}) \leqslant H_\mu(\mathscr{D}) + H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D})$.

証明 (1) の証明：定義によって

$$H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{D}) = \sum_i \sum_j \mu(D_i) \varphi\left(\frac{\mu(C_j \cap D_i)}{\mu(D_i)}\right).$$

$\mathscr{E}\leqslant\mathscr{D}$ であるから

$$H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})=\sum_j\sum_{E\in\mathscr{E}}\mu(E)\sum_{D_i\subset E}\frac{\mu(D_i)}{\mu(E)}\varphi\left(\frac{\mu(C_j\cap D_i)}{\mu(D_i)}\right)$$

$a_i=\mu(D_i)/\mu(E)$，j を固定して $x_i=\mu(C_j\cap D_i)/\mu(D_i)$ とおき，定理 27・1 を適用すると

$$H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})\leqslant\sum_j\sum_{E\in\mathscr{E}}\mu(E)\mu\left(\frac{\mu(C_j\cap E)}{\mu(E)}\right)=H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{E}).$$

（2）の証明；$\mathscr{C}\leqslant\mathscr{D}$ から，$\mathscr{C}\vee\mathscr{D}=\mathscr{D}$ である．よって

$$H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{D})=H_\mu(\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{D})=0.$$

（3）の証明；

$$\begin{aligned}H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D}\,|\,\mathscr{E})&=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D}\vee\mathscr{E})-H_\mu(\mathscr{E})\\&=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D}\vee\mathscr{E})-H_\mu(\mathscr{D}\vee\mathscr{E})\\&\quad+H_\mu(\mathscr{D}\vee\mathscr{E})-H_\mu(\mathscr{E})\\&=H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}\vee\mathscr{E})+H_\mu(\mathscr{D}\,|\,\mathscr{E})\\&\leqslant H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{E})+H_\mu(\mathscr{D}\,|\,\mathscr{E}).\end{aligned}$$

（4）の証明；

$$\begin{aligned}H_\mu(\mathscr{C})&=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{D}\,|\,\mathscr{C})\\&\leqslant H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})\\&=H_\mu(\mathscr{D})+H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}).\end{aligned}$$

定理 27・3　f は確率空間（$X,\mathscr{F},\mu$）の上の保測写像（単射とは限らない），$\mathscr{C},\mathscr{D}$ はX の有限分割とする．このとき次が成り立つ．

（1）　$H_\mu(f^{-k}\mathscr{C}\,|\,f^{-k}\mathscr{D})=H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})$　$(k\geqslant 0)$.

（2）　$h_\mu(f,\mathscr{C})\leqslant h_\mu(f,\mathscr{D})+H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})$.

（3）　$h_\mu(f,\mathscr{C}\vee f^{-1}(\mathscr{C})\vee\cdots\vee f^{-k}(\mathscr{C}))=h_\mu(f,\mathscr{C})$　$(k\geqslant 0)$.

証明　（1）の証明；μ は f-不変確率測度であるから

$$\begin{aligned}H_\mu(f^{-k}\mathscr{C}\,|\,f^{-k}\mathscr{D})&=H_\mu(f^{-k}\mathscr{C}\vee f^{-k}\mathscr{D})-H_\mu(f^{-k}\mathscr{D})\\&=H_\mu(\mathscr{C}\vee\mathscr{D})-H_\mu(\mathscr{D})\\&=H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D}).\end{aligned}$$

（2）の証明；

$$H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathscr{C}\Big)\leqslant H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathscr{D}\Big)+H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathscr{C}\,\Big|\,\bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathscr{D}\Big)$$

（定理 27・2（4））

$$\leqq H_\mu(\bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}\mathscr{D}) + \sum_{i=0}^{m-1} H_\mu(f^{-i}\mathscr{C} \mid \bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}\mathscr{D})$$

(定理 27・2 (3))

$$\leqq H_\mu(\bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}\mathscr{D}) + \sum_{i=0}^{m-1} H_\mu(f^{-i}\mathscr{C} \mid f^{-i}\mathscr{D})$$

(定理 27・2 (1))

$$\leqq H_\mu(\bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}\mathscr{D}) + mH_\mu(\mathscr{C} \mid \mathscr{D})$$

(定理 27・3 (1)).

(3) の証明; $\mathscr{D} = \mathscr{C} \vee \cdots \vee f^{-n}\mathscr{C}$ ($n \geqq 0$) とおくと

$$\frac{1}{m} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}\mathscr{D}) = \frac{1}{m} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{m+n-1} f^{-i}\mathscr{D}).$$

$m \to \infty$ とすれば, $m/(m+n) \to 1$ であるから, $h_\mu(f, \mathscr{D}) = h_\mu(f, \mathscr{C})$ である.

定理 27・4 $\mathfrak{A}, \mathscr{C}$ は有限分割で, f は保測写像とする. このとき次が成り立つ.

(1) $h_\mu(f, \mathfrak{A}) \leqq H_\mu(\mathfrak{A})$.

(2) $h_\mu(f, \mathfrak{A} \vee \mathscr{C}) \leqq h_\mu(f, \mathfrak{A}) + h_\mu(f, \mathscr{C})$.

(3) $\mathfrak{A} \leqq \mathscr{C} \Rightarrow h_\mu(f, \mathfrak{A}) \leqq h_\mu(f, \mathscr{C})$.

(4) f が単射で f^{-1} も保測であれば, 任意の $m \geqq 0$ に対して

$$h_\mu(f, \mathfrak{A}) = h_\mu(f, \bigvee_{i=-m}^{m} f^i(\mathfrak{A})).$$

証明 (1) の証明;

$$\frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathfrak{A}) \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu(f^{-i}\mathfrak{A}) \quad \text{(注意 27・1 (1))}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu(\mathfrak{A}) = H_\mu(\mathfrak{A}).$$

(2) の証明;

$$H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathfrak{A} \vee \mathscr{C})) = H_\mu((\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathfrak{A}) \vee (\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathscr{C}))$$

$$\leqq H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathfrak{A}) + H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathscr{C}).$$

(3) の証明; $\mathfrak{A} \leqq \mathscr{C}$ であるから, 任意の $n \geqq 1$ に対し

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathfrak{A} \leqq \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathscr{C}$$

が成り立つ．よって

$$h_\mu(f,\mathfrak{A})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}\mathfrak{A})\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}\mathscr{C})$$
$$=h_\mu(f,\mathscr{C}).$$

（4）の証明；

$$h_\mu(f,\bigvee_{i=-m}^{m}f^{i}\mathfrak{A})=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H_\mu(\bigvee_{j=0}^{k-1}f^{-j}(\bigvee_{i=-m}^{m}f^{j}\mathfrak{A}))$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m+k-1}f^{-i}(\mathfrak{A}))$$

である．さらに

$$H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m+k-1}f^{-i}\mathfrak{A})=H_\mu((\bigvee_{i=-m}^{m}f^{-i}\mathfrak{A})\vee(\bigvee_{i=-m+1}^{m+k-1}f^{-i}\mathfrak{A}))$$
$$=H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m+k-1}f^{-i}\mathfrak{A})+H_\mu((\bigvee_{i=-m}^{m}f^{-i}\mathfrak{A})\,|\,(\bigvee_{i=-m}^{m+k-1}f^{-i}\mathfrak{A}))$$
$$=H_\mu(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}\mathfrak{A})+H_\mu((\bigvee_{i=-m}^{m}f^{-i}\mathfrak{A})\,|\,(\bigvee_{i=-m}^{m+k-1}f^{-i}\mathfrak{A}))$$
$$\leqslant H_\mu(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}\mathfrak{A})+H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m}f^{-i}\mathfrak{A})$$

（注意27・2(2)）．

ゆえに

$$\frac{1}{k}H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m+k-1}f^{-i}\mathfrak{A})\leqslant\frac{1}{k}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}\mathfrak{A})+\frac{1}{k}H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m}f^{-i}\mathfrak{A}).$$

$H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m}f^{-i}\mathfrak{A})$ は k に無関係であるから

$$\frac{1}{k}H_\mu(\bigvee_{i=-m}^{m}f^{-i}\mathfrak{A})\to 0\quad(k\to\infty)$$

したがって，上に証明した（3）と合わせて（4）が得られる．

定理 27・5 （1） f が保測であれば，$m\geqslant 0$ に対し $h_\mu(f^m)=mh_\mu(f)$ が成り立つ．

（2） さらに f が単射で f^{-1} も保測であれば，$h_\mu(f^m)=|m|\,h_\mu(f)$ がすべての $m\in\boldsymbol{Z}$ に対して成り立つ．

証明 （1）の証明；

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}H_\mu(\bigvee_{j=0}^{k-1}f^{-mj}(\bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathfrak{A}))=\lim_{k\to\infty}\frac{m}{km}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{km-1}f^{-i}\mathfrak{A})$$
$$=mh_\mu(f,\mathfrak{A})$$

であるから

$$h_\mu(f^m,\ \bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathfrak{A})=mh_\mu(f,\mathfrak{A}).$$

よって

$$mh_\mu(f)=m\sup\{h_\mu(f,\mathfrak{A}):\mathfrak{A}\ \text{は有限分割}\}$$
$$=\sup\{h_\mu(f^m,\bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathfrak{A}):\mathfrak{A}\ \text{は有限分割}\}$$
$$\leqslant\sup\{h_\mu(f^m,\mathscr{C}):\mathscr{C}\ \text{は有限分割}\}$$
$$=h_\mu(f^m).$$

一方，定理 27·4 (3) により

$$h_\mu(f^m,\mathfrak{A})\leqslant h_\mu(f^m,\bigvee_{i=0}^{m-1}f^{-i}\mathfrak{A})=mh_\mu(f,\mathfrak{A})$$

である．よって $h_\mu(f^m)\leqslant mh_\mu(f)$.

(2) の証明；$h_\mu(f^{-1})=h_\mu(f)$ を示せば十分である．$H_\mu(\mathfrak{A})=H_\mu(f^{-1}\mathfrak{A})$ であるから

$$H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^i\mathfrak{A})=H_\mu(f^{-(n-1)}(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^i\mathfrak{A}))=H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}\mathfrak{A}).$$

よって，$h_\mu(f^{-1},\mathfrak{A})=h_\mu(f,\mathfrak{A})$ がすべての有限分割に対して成り立つ．ゆえに $h_\mu(f^{-1})=h_\mu(f)$ が求まる．

定理 27·6 (X,d) はコンパクト距離空間，μ は X の上の Borel 確率測度とする．有限分割 $\mathscr{D}=\{D_1,\cdots,D_n\}$ と

$$\max\{\mathrm{diam}(C):C\in\mathscr{C}_m\}\to 0\quad(m\to\infty)$$

となる有限分割の列 $\{\mathscr{C}_m:m\geqslant 1\}$ に対し，次を満たす有限分割の列 $\mathcal{E}_m=\{E_1{}^m,\cdots,E_n{}^m\}$ が存在する．

(1) $\mathcal{E}_m\leqslant\mathscr{C}_m\quad(m=1,2,\cdots)$,

(2) $\lim_{m\to\infty}\mu(E_i{}^m\varDelta D_i)=0\quad(1\leqslant i\leqslant n)$.

証明 μ は正則であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$K_i\subset D_i,\ \ \mu(D_i\setminus K_i)<\varepsilon\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

となる閉集合 K_i が存在する.

$$\delta=\inf\{d(K_i, K_j) : i\neq j\}$$

とおくと

$$\max\{\mathrm{diam}(C) : C\in\mathscr{C}_m\}<\delta/2$$

を満たす分割 $\mathscr{C}_m$ が存在する. この $\mathscr{C}_m$ を固定して

$$E_i^m=\cup\{C : C\in\mathscr{C}_m, C\cap K_i\neq\phi\} \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

とおく. $\mathscr{C}_m$ の各集合の直径が $\delta/2$ 以下であるから, いずれの K_i とも共通部分をもたない $C\in\mathscr{C}_m$ が存在する. この場合はいずれかの E_i^m に C をつけ加えておく. このとき $\mathcal{E}_m=\{E_i^m : 1\leqslant i\leqslant n\}$ は X の分割で $\mathcal{E}_m\leqslant\mathscr{C}_m$ である.

各 i に対し, $E_i^m\supset K_i$ であるから

$$\begin{aligned}\mu(E_i^m\Delta D_i)&=\mu(D_i\setminus E_i^m)+\mu(E_i^m\setminus D_i)\\&\leqslant\varepsilon+\mu(X\setminus\bigcup_{i=1}^n K_i)\\&\leqslant\varepsilon+n\varepsilon=(1+n)\varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ は任意であるから (2) が求まる.

定理 27·7 (X, d) はコンパクト距離空間とし, μ は X の上の Borel 確率測度とする. 任意の有限分割 $\mathscr{C}$ と任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して

$$\max\{\mathrm{diam}\ (D) : D\in\mathscr{D}\}<\delta$$

を満たすすべての分割 $\mathscr{D}$ に対し

$$H_\mu(\mathscr{C}\,|\,\mathscr{D})<\varepsilon$$

が成り立つ.

証明 分割 $\mathscr{C}=\{C_1, \cdots, C_n\}$ に対し定理 27·6 を適用すると, 任意の $\alpha>0$ に対して $\delta>0$ が存在して

$$\max\{\mathrm{diam}\ (D) : D\in\mathscr{D}\}<\delta$$

を満たす分割 $\mathscr{D}$ より細くない分割 $\mathcal{E}=\{E_1, \cdots, E_n\}$ が存在して, $\mu(E_i\Delta C_i)<\alpha$ を満たすようにできる. $\varphi(x)=-x\log x$ は $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ を満たす上に凸なる関数であるから, 正数 $\delta_0<1/3$ があって

$$[0, \delta_0]\cup[1-\delta_0, 1] \text{ の上で, } \varphi(x)<\varepsilon/2n$$

とできる. α は

$$\min\{\mu(C_i)\delta_0/2 : 1\leqslant i\leqslant n\}\geqslant\alpha$$

となるように選ばれているとしよう．このとき

$$\mu(C_i)\leqslant\mu(E_i)+\alpha\leqslant\mu(E_i)+\mu(C_i)/2$$

であるから，$\mu(C_i)/2\leqslant\mu(E_i)$ が求まる．

$$\mu(E_i)-\mu(E_i\cap C_i)\leqslant\mu(E_i\varDelta C_i)<\alpha<\delta_0\mu(E_i)$$

から，$\mu(E_i\cap C_i)/\mu(E_i)\geqslant 1-\delta_0$ である．よって $j\neq i$ であれば，$\delta_0<1/3$ に注意すると

$$\mu(E_i\cap C_j)/\mu(E_i)\quad\leqslant\delta_0.$$

を得る．よって

$$H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathcal{E})=\sum_i\mu(E_i)\sum_j\varphi\left(\frac{\mu(E_i\cap C_j)}{\mu(E_i)}\right)$$
$$\leqslant\sum_i\mu(E_i)\sum_j\varepsilon/2n<\varepsilon$$

定理 27･2 (1) により，$H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D})\leqslant H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathcal{E})<\varepsilon$ が求まる．

定理 27･8 f はコンパクト距離空間 X から X の上への連続写像とする．$\mathscr{B}$-可測（Borel 可測）である有限分割の列 $\{\mathscr{D}_n\}$ は

$$\max\{\mathrm{diam}\,(D):D\in\mathscr{D}_n\}\to 0\quad(n\to\infty)$$

を満たしているとする．このとき任意の $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し

$$h_\mu(f)=\lim_{n\to\infty}h_\mu(f,\mathscr{D}_n)$$

が成り立つ．

証明 任意の $n>0$ に対して，$h_\mu(f)\geqslant h_\mu(f,\mathscr{D}_n)$ であるから，$h_\mu(f,\mathscr{D}_n)$ の上極限は

$$h_\mu(f)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}h_\mu(f,\mathscr{D}_n)$$

である．任意の有限分割 $\mathscr{C}$ に対し，定理 27･3 (2) によって

$$h_\mu(f,\mathscr{C})\leqslant h_\mu(f,\mathscr{D}_n)+H_\mu(\mathscr{C}\mid\mathscr{D}_n).$$

よって定理 27･7 によって

$$h_\mu(f,\mathscr{C})\leqslant\varliminf_{n\to\infty}h_\mu(f,\mathscr{D}_n).$$

$\mathscr{C}$ は任意であるから

$$h_\mu(f)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}h_\mu(f,\mathscr{D}_n)$$

である．ゆえに $h_\mu(f)=\lim h_\mu(f,\mathscr{D}_n)$ を得る．

§ 28 エントロピーと固有値

確率測度を使って定義されたエントロピーと位相的エントロピーとの関係をトーラスの上の線形写像について調べよう.

定理 28·1 f は k 次元トーラス T^k の上の連続写像で全射とし, μ は T^k の上の f-不変 Borel 確率測度とする. このとき $h_\mu(f)\leqslant h(f)$ が成り立つ.

証明 $\|\cdot\|$ は $\boldsymbol{R}^k$ の上の通常のノルムとし, T^k の上の距離関数 d を

$$d(x+\boldsymbol{Z}^k, y+\boldsymbol{Z}^k)=\inf\{\|x-y+v\| : v\in\boldsymbol{Z}^k\}$$

によって定義する. $\boldsymbol{R}^k$ の閉部分集合

$$B_1(0)=\{x\in\boldsymbol{R}^k : \|x\|\leqslant 1\}$$

(0 は $\boldsymbol{R}^k$ の原点を表す) に対し整数 $q>0$ を固定する.

$$0\leqslant p_i\leqslant 2^q \quad (1\leqslant i\leqslant k)$$

なる自然数 p_i に対し, 矩形集合

$$\{(x_1, \cdots, x_k) : p_1/2^q\leqslant x_1<(p_1+1)/2^q, \cdots, p_k/2^q\leqslant x_k<(p_k+1)/2^q\}$$

を定義する. このような集合の族は, T^k の分割 $\mathscr{C}_q=\{A_1, \cdots, A_{2^{qk}}\}$ をなす. 半径 $1/2^{q+2}$ の T^k の開球は $\mathscr{C}_q$ の高々 2^k 個と共通部分をもっている. $\gamma=\{C_1, \cdots, C_s\}$ を半径 $1/2^{q+2}$ の T^k の開球からなる被覆とし, $2\delta>0$ は γ の Lebesgue 数とする.

任意の $x\in T^k$ を固定し, $B_\delta(x)\subset C_i$ となる $C_i\in\gamma$ を $C(x)$ で表す. F は最小の濃度をもつ f に対する (n, δ)-集約集合とする. $\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathscr{C}_q)$ は T^k の分割であるから, x を含む $\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathscr{C}_q)$ の元を

$$x\in\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_{i_j}) \quad (A_{i_j}\in\mathscr{C}_q)$$

とする. このとき $y\in F$ が存在して

$$\max\{d(f^j(x), f^j(y)) : 0\leqslant j\leqslant n-1\}\leqslant\delta$$

とできるから, $f^j(x)\in C(f^jy)$, よって $f^j(x)\in A_{i_j}\cap C(f^jy)$ である.

$$U_n=\{(i_0, \cdots, i_{n-1}) : \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_{i_j})\neq\phi\}$$

とおくと

$$\sharp U_n \leqslant 2^{nk}(\sharp F) = 2^{nk} r_n(\delta, T^k)$$

である（$\sharp U$ は U の濃度を表す）．注意 27・1（2）を適用したとき

$$H_\mu(\mathscr{C}_q \vee f^{-1}(\mathscr{C}_q) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathscr{C}_q)) \leqslant \log \sharp U_n$$
$$\leqslant n \log 2^k + \log r_n(\delta, T^k)$$

を得る．よって

$$h_\mu(f, \mathscr{C}^q) \leqslant \log 2^k + \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\delta, T^k) = \log 2^k + \bar{r}_f(\delta, T^k)$$
$$\leqslant k + h(f).$$

しかし

$$\max\{\mathrm{diam}\,(A) : A \in \mathscr{C}_q\} \to 0 \quad (q\to\infty)$$

であるから，定理 27・8 により

$$h_\mu(f) = \lim_{q\to\infty} h_\mu(f, \mathscr{C}_q) \leqslant k + h(f).$$

上の式は f が連続であれば成り立つから，f の代わりに任意の $n>0$ に対し，f^n について

$$h_\mu(f) = \frac{1}{n} h_\mu(f^n) \leqslant \frac{1}{n}[k + h(f^n)] = \frac{k}{n} + h(f)$$

を得る．ここで，$n\to\infty$ とすれば結論が求まる．

注意 28・1 定理 28・1 はコンパクト距離空間の上の連続写像に対して成り立つ．ただし連続写像は全射である．証明は困難であるので与えない．

次に 2 つのエントロピーが一致する場合を調べてみよう．

定理 28・2 f は k 次元トーラス T^k の上の自己同形写像とし，μ は T^k の上の Haar 確率測度とする．このとき

$$h_\mu(f) = h(f)$$

が成り立つ．

証明 定理 28・1 によって，$h_\mu(f) \leqslant h(f)$ であるから，$h_\mu(f) \geqslant h(f)$ を示せばよい．d は T^k の上の左側不変距離関数，すなわち

$$d(z+x, z+y) = d(x, y) \quad (x, y, z \in T^k)$$

とする．T^k の単位元を 0 で表す．

ε は正の実数とし，0 での ε-半径の開球 $U_\varepsilon(0)$ に対し，$y+U_\varepsilon(0)$ は点 y での ε-半径の開球となり，$y+U_\varepsilon(0)=U_\varepsilon(y)$ が成り立つ．ε と $n>0$ を固定し

$$D_n(x, \varepsilon, f)=\bigcap_{k=0}^{n-1} f^k(U_\varepsilon(f^k x))$$

とおく．明らかに

$$D_n(x, \varepsilon, f)=x+D_n(0, \varepsilon, f)$$

である．$\mathscr{C}=\{A_1, \cdots, A_n\}$ は T^k の分割で，各 $A_i\in\mathscr{C}$ は直径が ε 以下であるとしよう．このとき

$$x\in\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A_{i_k}) \quad\Rightarrow\quad \bigcap_{k=0}^{n-1} f^k(A_{i_k})\subset x+D_n(0, \varepsilon, f)$$

である．実際に，$y\in\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A_{i_k})$ に対し $f^k(x), f^k(y)\in A_{i_k}(0\leqslant k\leqslant n-1)$ であるから，$y\in f^{-k}U_\varepsilon(f^k)$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ である．すなわち $y\in D_n(x, \varepsilon, f)=x+D_n(0, \varepsilon, f)$．よって

$$\mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A_{i_k})\Big)\leqslant \mu(D_n(0, \varepsilon, f)).$$

さらに

$$\begin{aligned}
&\sum \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A_{i_k})\Big)\log \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A_{i_k})\Big)\\
&\quad\leqslant \sum \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A_{i_k})\Big)\log \mu(D_n(0, \varepsilon, f))\\
&\quad=\log \mu(D_n(0, \varepsilon, f))
\end{aligned}$$

(ここに $\sum$ は分割 $\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{C})$ の上での和を表す)．ゆえに

$$\begin{aligned}
h_\mu(f)\geqslant h_\mu(f, \mathscr{C})&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\mathscr{C}\vee f^{-1}(\mathscr{C})\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\mathscr{C}))\\
&\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big[-\frac{1}{n}\log \mu(D_n(0, \varepsilon, f)\Big].
\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ は任意であるから

$$h_\mu(f)\geqslant \lim_{\varepsilon\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big[-\frac{1}{n}\log \mu(D_n(0, \varepsilon, f))\Big].$$

最大濃度をもつ f に対する (n, ε)-集約集合を E とするとき

$$\cup\{x+D_n(0, \varepsilon/2, f): x\in E\}$$

は互いに交わらない集合の和集合であるから

$$s_n(\varepsilon, T^k)\mu(D_n(0, \varepsilon/2, f)) \leqslant 1.$$

よって

$$s_n(\varepsilon, T^k) \leqslant 1/\mu(D_n(0, \varepsilon/2, f)).$$

だから

$$\bar{s}_f(\varepsilon, T^k) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{n}\log \mu(D_n(0, \varepsilon/2, f))\right].$$

$\varepsilon\to 0$ としたとき

$$h(f)=h_d(f) \leqslant \lim_{\varepsilon\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{n}\log \mu(D_n(0, \varepsilon/2, f))\right]$$
$$\leqslant h_\mu(f).$$

ゆえに

$$h_\mu(f)=h(f)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{n}\log \mu(D_n(0, \varepsilon/2, f))\right]$$

が求まる．

有限次元トーラスの上の自己同形写像 f のエントロピーと f に対応する行列の固有値との関係を調べよう．特別な場合は定理 17·9 に述べられている．

p 次元複素空間 C^p は通常のノルム $\|\cdot\|$ によってノルム空間，特に Banach 空間になる．$B(C^p)$ は C^p の上の有界な線形写像の全体とすると，それはベクトル空間である．$f\in B(C^p)$ に対し f のノルムを

$$\|f\|=\inf\{r : \|f(x)\|\leqslant r\|x\|, x\in C^p\}$$

によって定義する．このノルムに関して $B(C^p)$ はノルム空間である．

注意 28·2 $B(C^p)$ は Banach 空間である．

証明 $f_n\in B(C^p)$ $(n\geqslant 1)$ が $\lim_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$ を満たすとき，$f\in B(C^p)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ を示せばよい．いま任意の $x\in C^p$ に対し

$$f_1(x), f_2(x), \cdots\in C^p$$

を考えると

$$\|f_n(x)-f_m(x)\|=\|(f_n-f_m)(x)\|\leqslant\|f_n-f_m\|\,\|x\|$$

であるから，$\lim_{n,m\to\infty}\|f_n(x)-f_m(x)\|=0$，したがって $f_1(x), f_2(x), \cdots$ は基本列をなし，C^p は Banach 空間であるから，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する．x に $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

を対応させる写像を f とすれば，f は $\boldsymbol{C}^p$ の上で定義された線形写像になることが確かめられる．よって

$$\|f_n(x)-f(x)\|=\lim_{m\to\infty}\|f_n(x)-f_m(x)\|\leqq\varliminf_{m\to\infty}\|f_n-f_m\|\,\|x\|.$$

ゆえに

$$\|f_n-f\|\leqq\varliminf_{m\to\infty}\|f_n-f_m\|,\quad \varlimsup_{n\to\infty}\|f_n-f\|\leqq\lim_{n,\,m\to\infty}\|f_n-f_m\|$$

となり，$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ が求まる．

補題 28·1 X は複素 Banach 空間とし，$x(\lambda)$ は X に値をとる複素変数関数とする．このとき $x(\lambda)$ が $|\lambda|>\rho_0$ において正則，かつ $\lim_{\lambda\to\infty}x(\lambda)$ が存在するならば，$x(\lambda)$ は $|\lambda|>\rho_0$ においてノルム収束するローラン級数

$$x(\lambda)=x_0+\frac{1}{\lambda}x_1+\frac{1}{\lambda^2}x_2+\cdots\quad(x_0,x_1,\cdots\in X)$$

に展開される．

証明に対しては文献表〔6〕を参照されたい．

補題 28·2 ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^p$ の上の線形写像 $f:\boldsymbol{R}^p\to\boldsymbol{R}^p$ の最大固有値を λ とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\|f^n\|^{1/n}=|\lambda|$$

が成り立つ．ここに $\|\cdot\|$ は通常のノルムを表す．

証明 f を複素化する．すなわち

$$f_c(a+ib)=f(a)+if(b)\quad(a,b\in\boldsymbol{R}^p)$$

とする．ここに i は虚数単位である．複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^p$ のノルムを

$$\|a+ib\|=\max\{\|a\|,\|b\|\}$$

によって与える．このとき f_c のノルムは $\|f\|$ と一致する．すなわち

$$\|f_c\|=\|f\|$$

である．f_c の固有値と f の固有値は同じであるから，f の最大固有値 λ は f_c の最大固有値である．$0\neq v\in\boldsymbol{C}^p$ は λ に対応する固有ベクトルとすれば，任意の $n\geqq0$ に対し $f_c{}^n(v)=\lambda^n v$ である．f_c のノルムの定義から

$$\|f^n\|=\|f_c{}^n\|\geqq|\lambda|^n\quad(n\geqq0).$$

ゆえに

$$\varliminf_{n\to\infty}\|f^n\|^{1/n}\geqq|\lambda|$$

が成り立つ.

$|\eta|>|\lambda|$ なる複素数 η に対し，線形写像 $\eta-f_c:\boldsymbol{C}^p\to\boldsymbol{C}^p$ は単射である．よって，それは全射でもあるから，逆写像 $(\eta-f_c)^{-1}:\boldsymbol{C}^p\to\boldsymbol{C}^p$ が存在する.

$$R(\eta)=\left(id-\left(\frac{1}{\eta}\right)f_c\right)^{-1}$$

とおくと，$(1/\eta)R(\eta)=(\eta-f_c)^{-1}$ である．$R(\eta)$ は補題 28·1 の条件を満たすから，$R(\eta)$ は $|\eta|>|\lambda|$ なる η においてノルム収束するローラン級数に展開される．すなわち

$$R(\eta)=id+\frac{1}{\eta}f_c+\frac{1}{\eta^2}f_c{}^2+\cdots.$$

この級数の収束半径 R は Cauchy-Hadamard の公式から

$$R=1\Big/\varlimsup_{n\to\infty}\|f_c{}^n\|^{1/n}$$

である．よって $|\rho|<R$ なる ρ において，この級数は収束し $|\rho|>R$ においてこの級数は収束しない．ゆえに $|\eta|>|\lambda|$ なる η は $1/|\eta|<R$ を満たす．すなわち

$$|\eta|>\varlimsup_{n\to\infty}\|f_c{}^n\|^{1/n}$$

である．だから $|\lambda|\geqq\varlimsup_{n\to\infty}\|f_c{}^n\|^{1/n}$ が求まる.

定理 28·3 $f:\boldsymbol{R}^p\to\boldsymbol{R}^p$ は線形写像で，d は $\boldsymbol{R}^p$ の通常のノルムから決まる距離関数とする．このとき

（1） $\det(f)\neq0 \Rightarrow h_d(f)\geqq\log|\det(f)|$.

（2） f のすべての固有値が同じ絶対値 τ をもつとき

$$h_d(f)=\max\{0,\ p\log\tau\}$$

が成り立つ.

証明 $\boldsymbol{R}^p$ の上のノルムは互いに一様連続であるから，定理 18·2 によって位相的エントロピーは変わらない．$\boldsymbol{R}^p$ の上の距離関数 d はノルム $\|\cdot\|$ によって与えられるとすると

$$d(f(x),f(y))=\|f(x)-f(y)\|\leqslant\|f\|\,\|x-y\|=\|f\|d(x,y).$$

だから $f\in UM(\boldsymbol{R}^p)$，すなわち f は d に関して一様連続である．

（1）の証明：$\boldsymbol{R}^p$ の上の Lebesgue 測度を μ とすると，すべての Borel 集合 E に対し

$$\mu(fE)=|\det(f)|\mu(E)$$

が成り立つ．K は $\boldsymbol{R}^p$ のコンパクト部分集合で，$\mu(K)>0$ とする．F は f に対する K の (n,ε)-集約集合とする．このとき，任意の $x\in\boldsymbol{R}^p$ に対し

$$D_n(x,\varepsilon,f)=\bigcap_{i=0}^{n-1}f^{-i}(U_\varepsilon(f^ix))$$

とおくと

$$K\subset\cup\{\overline{D_n(x,\varepsilon,f)}:x\in F\}=\cup\{x+\overline{D_n(0,\varepsilon,f)}:x\in F\}$$

が成り立ち

$$\mu(K)\leqslant\mu(\overline{D_n(0,\varepsilon,f)})r_n(\varepsilon,K)=\mu(D_n(0,\varepsilon,f))r_n(\varepsilon,K).$$

すなわち

$$r_n(\varepsilon,K)\geqslant\mu(K)/\mu(D_n(0,\varepsilon,K)).$$

よって

$$\bar{r}_f(\varepsilon,K)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\log\mu(K)-\log\mu(D_n(0,\varepsilon,f))\right\}$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{n}\log\mu(D_n(0,\varepsilon,f))\right\}.$$

ところで

$$D_n(0,\varepsilon,f)\subset f^{-(n-1)}U_\varepsilon(0)$$

であるから

$$\mu(D_n(0,\varepsilon,f))\leqslant\mu(f^{-(n-1)}U_\varepsilon(0))=\mu(U_\varepsilon(0))/|\det(f)|^{n-1}.$$

ゆえに

$$\bar{r}_f(\varepsilon,K)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log|\det(f)|^{n-1}-\log\mu(U_\varepsilon(0))\}=\log|\det(f)|.$$

このことから

$$h_d(f)\geqslant h(f,K)\geqslant\log|\det(f)|$$

が求まる．

（2）の証明；$|\det(f)|$ は f の固有値の積の絶対値と一致するから

$$|\det(f)|=\tau^p.$$

ゆえに，（1）によって $h_d(f)\geqslant p\log\tau$ である．よって

$$h_d(f)\geqslant\max\{0,p\log\tau\}.$$

逆の不等式を示すために，f のノルムが $\|f\|>1$ の場合と $\|f\|\leqslant 1$ の場合とに分けて証明しよう．

$\|f\|>1$ の場合；K は $\boldsymbol{R}^p$ のコンパクト部分集合で，その直径を1/2以下とし，集合 $b+K$ が0ベクトルを含むように $b\in\boldsymbol{R}^p$ を選ぶ．ここで $b+K$ を K_b で表すことにする．明らかに $\mathrm{diam}(K_b)<1/2$ であるから

$$I_{1,p}=\{(x_1,\cdots,x_p)\in\boldsymbol{R}^p : |x_i|\leqslant 1\quad(1\leqslant i\leqslant p)\}$$

は K_b を含む．

$0<\delta<1$ なる δ に対し，集合

$$F(\delta)=\{(n_1\delta,\cdots,n_p\delta) : n_i\in\boldsymbol{Z},\,|n_i\delta|<2\quad(1\leqslant i\leqslant p)\}$$

の濃度は $\sharp F(\delta)\leqslant(5/\delta)^p$ である．任意の $y\in I_{1,p}$ に対し $x\in F(\delta)$ があって，$d(x,y)<c\delta$ となるように $c>0$ を選ぶことができる．

$F(\delta)$ は f に対する K_b の $(n,\|f\|^n c\delta)$-集約集合である．実際に，$y\in K_b$ に対し $x\in F(\delta)$ が存在して

$$d(f^i(x),f^i(y))\leqslant\|f\|^i d(x,y)\leqslant\|f\|^i c\delta\leqslant\|f\|^n c\delta$$

が $0\leqslant i\leqslant n-1$ なるすべての i に対し成り立つ．よって $F(\delta)$ は f に対する K_b の $(n,\|f\|^n c\delta)$-集約集合である．

$$\delta=\varepsilon/\|f\|^n c<1$$

となるように十分大きく $n>0$ を選ぶとき

$$r_n(\varepsilon,K)\leqslant\sharp F(\varepsilon/\|f\|^n c)\leqslant(5\|f\|^n c/\varepsilon)^p$$

である．だから

$$\begin{aligned}\bar{r}_f(3,K)&=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon,K)\\&\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{p}{n}\left\{\log 5+n\log\|f\|+\log c-\log\varepsilon\right\}\\&=p\log\|f\|.\end{aligned}$$

ゆえに $\|f\|>1$ の場合には

$$h_d(f)\leqslant\max\{0,p\log\|f\|\}$$

を得る．

$\|f\|\leqslant 1$ の場合；$(1,\varepsilon)$-集約集合は (n,ε)-集約集合であるから，$h_d(f)=0$ と

なる．いずれの場合においても

$$h_d(f)\leqslant\max\{0,\ p\log\|f\|\}$$

である．f を $f^n(n>0)$ に置き換えるとき

$$h_d(f)=\frac{1}{n}h_d(f^n)\leqslant\frac{1}{n}\max\{0,\ p\log\|f^n\|\}=\max\{0,\ p\log\|f^n\|^{1/n}\}$$

である．ところで，補題28·2によって

$$\lim_{n\to\infty}\|f^n\|^{1/n}=\tau$$

であるから，(2) が成り立つ．

注意 28·3　$f:\boldsymbol{R}^p\to\boldsymbol{R}^p$ は線形写像で，d はユークリッド距離関数とし，μ は $\boldsymbol{R}^p$ の上の Lebesgue 測度とする．このとき任意の $n\geqslant 1$ に対し

$$D_n(0,\varepsilon,f)=\bigcap_{i=0}^{n-1}f^{-i}(U_\varepsilon(0))$$

とおくと

$$h_d(f)=\lim_{\varepsilon\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{-\frac{1}{n}\log\mu(D_n(0,\varepsilon,f))\right\}$$

が成り立つ．

証明　定理28·3 (1) の証明のように

$$\bar{r}_f(\varepsilon,K)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{-1}{n}\log\mu(D_n(0,\varepsilon,f))\right\}$$

が求まる．よって

$$h_d(f)\geqslant\lim_{\varepsilon\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{-1}{n}\log\mu(D_n(0,\varepsilon,f))\right\}.$$

実数 $q>0$ に対し

$$K(q)=\{(x_1,\cdots,x_p)\in\boldsymbol{R}^p:|x_i|\leqslant q\quad(1\leqslant i\leqslant p)\}$$

とおき，E は $K(q)$ の任意の (n,ε)-分離集合とする．このとき

$$\cup\{D_n(x,\varepsilon/2,f\}:x\in E\}$$

は互いに共通部分をもたない和集合で

$$\cup\{D_n(x,\varepsilon/2,f):x\in E\}=\cup\{x+D_n(0,\varepsilon/2,f):x\in E\}\subset K(q+\varepsilon)$$

が成り立つ．よって

$$s_n(\varepsilon,K(q))\mu(D_n(0,\varepsilon/2,f))\leqslant\{2(q+\varepsilon)\}^p.$$

ゆえに

$$\bar{s}_f(\varepsilon, K(q)) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{-\frac{1}{n}\log\mu(D_n(0, \varepsilon/2, f))\right\}.$$

この不等式から

$$h_d(f)=\sup\{h_d(f, K(q)) : q>0\}$$
$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{-1}{n}\log\mu(D_n(0, \varepsilon, f))\right\}$$

が求まる．

定理 28・4 f は $\boldsymbol{R}^p$ の上の線形写像で，d は $\boldsymbol{R}^p$ の上のユークリッドの距離関数とする．このとき，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ を f の固有値とするとき

$$h_d(f)=\sum_{|\lambda_i|>1}\log|\lambda_i|$$

が成り立つ．

証明 f の実数体の上の Jordan の標準形から，$\boldsymbol{R}^p$ は

$$\boldsymbol{R}^p=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$$

と直和分解され，各部分空間 E_i は $f(E_i)=E_i$ で f の E_i への制限 $f_i=f_{|E_i}$ の固有値の絶対値はすべて同じ大きさ τ_i をもつようにできる．ゆえに f は各部分空間 E_i へ制限された f_i の直和

$$f(x_1, \cdots, x_k)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_k(x_k) \quad (x_i\in E_i, 1\leqslant \varepsilon\leqslant k)$$

で表される．

$\boldsymbol{R}^p$ の上のすべてのノルムは互いに一様同値であることに注意する．部分空間 E_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ の直積ベクトル空間 $E_1\times\cdots\times E_k$ を V で表し，$(x_1, \cdots x_k)\in V$ に対し $\boldsymbol{R}^p$ のベクトル $x_1+\cdots+x_k$ に対応させる線形写像を h とする．明らかに h は全射である．だから h は単射となる．V の上の線形写像 $f_1\times\cdots\times f_k$ を

$$(x_1, \cdots, x_k) \quad \mapsto \quad (f_1(x), \cdots, f_k(x_k))$$

によって定義する．このとき $f_1\times\cdots\times f_k$ は f と h のもとで可換となる．すなわち

$$h\circ(f_1\times\cdots\times f_k)=f\circ h.$$

$1\leqslant i\leqslant k$ なる i に対し，$\|x_i\|_i$ は E_i の上のノルムとし，$x=x_1+\cdots+x_k\in\boldsymbol{R}^p$ に対し

$$\|x\|=\max\{\|x_i\|_i : 1\leqslant i\leqslant h\}$$

によって $\boldsymbol{R}^p$ の上にノルムを与える．一方

$$\|(x_1, \cdots, x_k)\| = \max\{\|x_i\|_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

によって V の上にもノルムが定義される．これらのノルムによって $\boldsymbol{R}^p$ と V の上に距離関数をそれぞれ定義し，複雑さをさけるために同じ記号 d で表す．ここで，定理 18・2 を適用すると

$$h_d(f) = h_d(f_1 \times \cdots \times f_k)$$

が成り立つ．さらに定理 18・4（2）を適用すると

$$h_d(f) \leqslant \sum_{i=1}^{k} h_d(f_i)$$

が成り立つ（$h_d(f_i)$ の d は E_i への制限した距離関数を表す）．定理 28・3（2）により

$$\begin{aligned} h_d(f) &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \max\{0, \dim(E_i) \log \tau_i\} \\ &= \sum_{\tau_i > 1} \dim(E_i) \log \tau_i \\ &= \textstyle\sum_{|\lambda_i| > 1} \log|\lambda_i| \end{aligned}$$

を得る．

逆の不等式を示そう．注意 28・3 により

$$h_d(f) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mu(D_n(0, \varepsilon, f)) \right\}.$$

$\boldsymbol{R}^p$ を f の固有値の絶対値が 1 より大である部分空間 F_1 と 1 より小さいか 1 に等しい部分空間 F_2 とに直和分解 $\boldsymbol{R}^p = F_1 \oplus F_2$ する．各 F_i に対し $f(F_i) = F_i$ $(i=1, 2)$ である．したがって $f_1 = f_{|F_1}$ は絶対値が 1 より大きい固有値をもち，$f_2 = f_{|F_2}$ は絶対値が 1 より小さいか 1 に等しい固有値をもつ．

任意の $n \geqslant 1$ に対し

$$D_n(0, \varepsilon, f) \subset U_\varepsilon(0) \cap f^{-(n-1)}(U_\varepsilon(0))$$

であるから，n に依存しない $C_\varepsilon > 0$ があって

$$\mu(D_n(0, \varepsilon, f)) \leqslant C_\varepsilon |\det(f_1{}^{-(n-1)})|$$

が成り立つ．よって

$$\overline{\lim_{n \downarrow \infty}} \left\{ -\frac{1}{n} \log \mu(D_n(0, \varepsilon, f)) \right\} \geqslant \log|\det(f_1)| = \textstyle\sum_{|\lambda_i| > 1} \log|\lambda_i|.$$

ゆえに

$$h_d(f) \geqslant \textstyle\sum_{|\lambda_i| > 1} \log|\lambda_i|$$

が得られる．

定理 28・10 f は T^p の上の自己同型写像とし，f に対応する行列を $[f]$ とする．このとき $[f]$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ とするとき

$$h(f)=\sum_{|\lambda_i|>1}\log|\lambda_i|$$

が成り立つ（f が拡大性の条件を満たすときは定理 17・9 に同じ結果が述べられている）．

証明 行列 $[f]$ の定義する線形写像 $\bar{f}: \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}^p$ は f のリフトである．$\boldsymbol{R}^p$ の上のユークリッドの距離関数 d から T^p の上の距離関数 d_1 が注意 5・1 のように定義できる．$\pi: x \mapsto x+\boldsymbol{Z}^p (x \in \boldsymbol{R}^p)$ によって定義される準同型写像 $\pi: \boldsymbol{R}^p \to T^p$ は局所被覆写像である．明らかに $\pi \circ \bar{f}=f \circ \pi$ が成り立つ．よって定理 18・5 によって $h_d(\bar{f})=h_{d_1}(f)$．T^p はコンパクトであるから，定理 18・3 より $h_{d_1}(f)=h(f)$ である．最後に定理 28・9 を使うと $h(f)=\sum_{|\lambda_i|>1}\log|\lambda_i|$ が求まる．

§29 最大エントロピーと確率測度

コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f に対して，どんな $\mu \in \mathscr{M}_f(X)$ をもってきても $h_\mu(f) \leqslant h(f)$ が成り立つ（注意 28・2）．したがって f の位相的エントロピーは最大エントロピーを表しているといってよい．そこで Borel 確率測度 $\mu \in \mathscr{M}_f(X)$ が存在して $h_\mu(f)=h(f)$ を満たすとき，μ は (X,f) の**平衡状態**を表すという．§28 で k 次元トーラス T^k の上の線形写像 f は Haar 確率測度 μ に対し，$h_\mu(f)=h(f)$ が成り立つことを調べた．したがって，Haar 確率測度 μ は (T^k, f) の平衡状態を表している．このような μ は T^k の上に自然に存在する確率測度である．その他にどんな種類の同相写像が平衡状態をもつであろうか．この問題に対して次の定理がある．

定理 29・1 コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が拡大性と明記性をもてば

$$h_\mu(f)=h(f)$$

を満たす f-不変 Borel 確率測度 $\mu \in \mathscr{M}_f(X)$ が存在する．

f の n-周期点の集合 $P_n(f)$ は，f が拡大的であるから有限集合である．こ

のとき

$$\mu_n=\frac{1}{\sharp P_n(f)}\sum\{\delta_x : x\in P_n(f)\}$$

とおくと，μ_n は f-不変 Borel 確率測度である（ここに δ_n はディラク測度を表す）．すなわち $\mu_n\in\mathcal{M}_f(X)$ である．定理 24・1 によって，$(\mathcal{M}_f(X),D)$ はコンパクト距離空間であるから，列 $\{\mu_n\}$ の適当な部分列 $\{\mu_{n_k}\}$ は収束する．すなわち

$$\mu=\lim_{k\to\infty}\mu_{n_k}.$$

このとき μ は f-不変 Borel 確率測度である．（定理 25・4 の証明参照）この測度 μ が (X,f) の平衡状態を表すことを証明しよう．

補題 29・1 十分に小さな $\varepsilon>0$ に対し，定数 $A_\mu>0$ が存在してすべての $x\in X$ と $n\geqslant 1$ に対して

$$\mu(B_\varepsilon^n(x))\geqslant A_\varepsilon 2^{-nh}$$

が成り立つ．ここに $h=h(f)$ で，$B_\varepsilon^n(x)=\cap\{f^{-j}B_\varepsilon(f^jx) : 0\leqslant j\leqslant n-1\}$ ($B_\varepsilon(y)$ は ε-閉球を表す）である．

証明 $\varepsilon>0$ は十分小さく，m は自然数とする．G は X の最大濃度ををもつ $(m,3\varepsilon)$-分離集合とし，$M=M(\varepsilon)>0$ は明記性の定義にあらわれる整数とする．xを固定して自然数 n に対し

$$r=n+m+2M$$

とおく．このとき各 $z\in G$ に対し，$x(z)\in P_r(f)$ が存在して

$$d(f^j(x(z)),f^j(z))\leqslant\varepsilon \quad (0\leqslant j<n)$$

$$d(f^{n+M+j}(x(z)),f^j(z))\leqslant\varepsilon \quad (0\leqslant j<m)$$

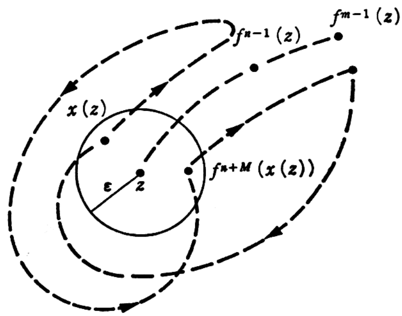


図 9・2

を満たすようにできる．$z\neq z'$ なる $z,z'\in G$ に対ししては，$x(z)\neq x(z')$ である．よって

$$\sharp(B_\varepsilon^n(x)\cap P_r(f))\geqslant\sharp G=s_m(3\varepsilon,X)$$

が成り立つ．ゆえに

$$\mu_r(B_\varepsilon{}^n(x)) = \frac{1}{\sharp P_r(f)} \sharp(B_\varepsilon{}^n(x) \cap P_r(f))$$
$$\geqq s_m(3\varepsilon, X)/\sharp P_r(f)$$
$$\geqq e^{-hr}/E\cdot 2^{hn}/D_{3\varepsilon} \quad \text{（補題 19·4, 19·5 によって）}$$

を得る．

$$A_\varepsilon = \{ED_{3\varepsilon}2^{2Mh}\}^{-1}$$

とおくと

$$\mu_r(B_\varepsilon{}^n(x)) \geqq A_\varepsilon 2^{-hn}$$

が求まる．$B_\varepsilon{}^n(x)$ は閉集合であるから，定理 23·3 (2) により

$$\mu(B_\varepsilon{}^n(x)) \geqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \mu_r(B_\varepsilon{}^n(x)) \geqq A_{\varepsilon 2}{}^{-hn}$$

である．

注意 29·1 Borel 確率測度 μ は空でない開集合の測度を正にもつ f-不変測度である．

証明 補題 29·1 から明らかである．

補題 29·2 十分小さい $\varepsilon>0$ に対し $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ と $B_\varepsilon>0$ が存在して，すべての $y\in X$ と $n\geqq 1$ に対し

$$\mu(B_\varepsilon{}^n(y)) \leqq B_\varepsilon 2^{-nh}$$

が成り立つ．

証明 $M=M(\varepsilon)>0$ は明記性にあらわれる自然数とする．ここで

(29·1) $d(x, y)<6\delta \;\Rightarrow\; \max\{d(f^j(x), f^j(y)) : |j|\leqq M\}\leqq\varepsilon$

を満たすように δ $(0<\delta<\varepsilon)$ を選ぶ．自然数 n, m に対し

$$r=n+m+2M$$

とおく．f の拡大性によって $P_r(f)\cap B_{3\delta}{}^n(y)$ の異なる 2 点 x, z に対し，$\{x, z\}$ は (r, ε)-分離集合である．実際に，x, z は r-周期の点であることに注意すれば容易にわかる．

ところで，$\{f^{n+2M}(x), f^{n+2M}(z)\}$ は (m, ε)-分離集合である．まずこのことを示そう．$x, z\in B_{3\delta}{}^n(y)$ から

$$d(f^j(x), f^j(y)) \leqslant 3\delta,\quad d(f^j(z), f^j(y)) \leqslant 3\delta \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1)$$

である．だから $0 \leqslant j \leqslant n-1$ なる j に対し

$$d(f^j(x), f^j(z)) \leqslant d(f^j(x), f^j(y)) + d(f^j(y), {}^j(z)) \leqslant 3\delta + 3\delta = 6\delta$$

である．よって (29・1) より

$$(29\cdot2)\quad d(f^j(x), f^j(z)) \leqslant \varepsilon \quad (0 \leqslant j \leqslant 2M+n-1)$$

が成り立つ．さらに $\{x, z\}$ は (r, ε)-分離集合であるから，$0 \leqslant j \leqslant r-1$ なる j が存在して

$$(29\cdot3)\quad d(f^j(x), f^j(z)) > \varepsilon$$

である．(29・2) と (29・3) より，$0 \leqslant j \leqslant m-1$ なる j が存在して

$$d(f^{2M+n+j}(x), f^{2M+n+j}(z)) > \varepsilon$$

とできる．ゆえに $\{f^{n+2M}(x), f^{n+2M}(z)\}$ は (m, ε)-分離集合である．

よって

$$\sharp\{B_{3\delta}{}^n(y) \cap P_r(f)\} \leqslant s_m(\varepsilon, X)$$

である．だから

$$\begin{aligned}\mu_r(B_{3\delta}{}^n(y)) &= \frac{1}{\sharp P_r(f)} \sharp\{B_{3\delta}{}^n(y) \cap P_r(f)\}\\ &\leqslant \frac{1}{\sharp P_r(f)} s_m(\varepsilon, X)\\ &\leqslant D_\varepsilon{}^{-1} 2^{-hr} E^{-1} 2^{hm} \quad (\text{補題 } 19\cdot4,\ 19\cdot5 \text{ によって})\end{aligned}$$

が成り立つ．いま

$$B_\varepsilon = \{D_\varepsilon E 2^{2hM}\}^{-1}$$

とおくと

$$\mu_r(B_{3\delta}{}^n(y)) \leqslant B_\varepsilon 2^{-hn}$$

が求まる．

$$B_\delta{}^n(y) \subset \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j} U_{2\delta}(f^j y) = V \subset B_{3\delta}{}^n(y)$$

であるから

$$\mu_r(V) \leqslant B_\varepsilon 2^{-hn}.$$

よって $r \to \infty$ とするとき，定理 23・3 (3) により

$$\mu(B_\delta{}^n(y)) \leqslant \mu(V) \leqslant \varliminf_{r \to \infty} \mu_r(V) \leqslant B_\varepsilon 2^{-hn}$$

が求まる．

コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f に対し，Borel 確率測度 $\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ が **f-等質的**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対し定数 $\delta>0$ と $B>0$ が存在して，すべての $n>0$ とすべての $x,y\in X$ に対し

$$B\mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}B_\varepsilon(f^k x)\Big)\geqslant \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}B_\delta(f^k y)\Big)$$

が成り立つときをいう．

注意 29・2 補題 29・1, 29・2 により，μ は f-等質的である．

次の定理から定理 29・1 の証明は完結する．

定理 29・2 Borel 確率測度 ν が f-等質的であれば

$$h(f)=h_\nu(f)$$

が成り立つ．

証明 ν は f-等質的であるから $\varepsilon>0$ に対し

$$B\nu(B_{\varepsilon/2}{}^n(x))\geqslant\nu(B_\delta{}^n(y)) \quad (n>0,\ x,y\in X)$$

を満たすように $\delta>0$ と $B>0$ をみつけることができる．E は最大濃度をもつ (n,ε)-分離集合とする．このとき $x,y\in E$ $(x\neq y)$ に対し

$$B_{\varepsilon/2}{}^n(x)\cap B_{\varepsilon/2}{}^n(y)=\phi$$

が成り立つ．よって

$$1\geqslant\sum_{x\in E}\nu(B_{\varepsilon/2}{}^n(x))\geqslant \sharp E B^{-1}\sup\{\nu(B_\delta{}^n(z)) : z\in X\}$$

を得る．$\alpha=\{A_1,\cdots,A_N\}$ は X の $\mathscr{B}$-可測分割とし，$\operatorname{diam}(A_i)<\delta$ $(1\leqslant i\leqslant N)$ を満たすとしよう．このとき，任意の $A\in\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)$ に対し

$$A\subset B_\delta{}^n(z)$$

を満たす $z\in X$ が存在する．だから

$$\nu(A)\leqslant\sup\{\nu(B_\delta{}^n(z)) : z\in X\}$$

である．ゆえに

$$-\sum\{\nu(A)\log\nu(A) :\ A\in\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\alpha)\}\geqslant\log\{\sup_{z\in X}\nu(B_\delta{}^n(z))\}^{-1}$$
$$\geqslant\log\{B^{-1}\sharp E\}$$

である．上式の両辺を n で割って，$n\to\infty$ とすると

$$h_\nu(f)\geqq h_\nu(f,\alpha)\geqq \bar{s}_f(\varepsilon,X).$$

ここに $\sharp E=s_n(\varepsilon,X)$ で，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log s_n(\varepsilon,X)=\bar{s}_f(\varepsilon,X)$ である．いま $\varepsilon\to 0$ とすれば

$$h_\nu(f)\geqq h(f)$$

が求まる．逆の不等式は注意 28･1 によって成り立つから，$h_\nu(f)=h(f)$ である．

定理 29･3　定理 29･1 の仮定のもとで，得られた f-不変 Borel 確率測度 μ に対し，f はエルゴード的である．

証明　部分集合 A,B はコンパクトであるとする．開集合

$$U=\{y\in X: d(y,A)<2\delta\}$$

$$V=\{y\in X: d(y,B)<2\delta\}$$

の境界 $\partial U,\partial V$ の μ-測度が $\mu(\partial U)=\mu(\partial V)=0$ となるように $\delta>0$ をみつけることができる．何故ならば，すべての $\delta>0$ に対し $\mu(\partial U)>0$ とすると，$\mu(\partial U)>1/n$ なる δ の集合の濃度は可算より大きくなる $n>0$ がみつかる．しかし μ は確率測度であるから，矛盾が起きる．

$$\tilde{U}=\{y\in X: d(y,A)<\delta\}$$

$$\tilde{V}=\{y\in X: d(y,B)<\delta\}$$

とおき，$0<\varepsilon<c/2$ なる ε を固定する．ここに c は f の拡大定数である．定理 7･2 によって，自然数 $N=N(\delta)>0$ が存在して

$$(29\cdot 4)\quad \max\{d(f^j(x),f^j(y)): |j|\leqq N\}<\varepsilon \Rightarrow d(x,y)<\delta$$

とできる．

$n>N$ を固定し，s,t は自然数とする．$M=M(\varepsilon)>0$ は明記性の定義にあらわれる自然数とし，E_s は $(s,2\varepsilon)$-分離集合，E_t は $(t,2\varepsilon)$-分離集合とする．2つの整数列 a_1,a_2,a_3,a_4 と b_1,b_2,b_3,b_4 を次のように定義しよう．

$$\begin{aligned} a_1&=-n, & b_1&=n,\\ a_2&=b_1+M, & b_2&=a_2+s\\ a_3&=b_2+M, & b_3&=a_3+2n\\ a_4&=b_3+M, & b_4&=a_4+t \end{aligned}$$

$m=b_4-a_1+M$ とすると

(29.5) $m=t+s+4n+4M$

である．このとき

$$z_1\in P_{2n}(f)\cap f^{-n}(\tilde{U}),\ z_2\in E_s,\ z_3\in P_{2n}(f)\cap f^{-n}(\tilde{V}),\ z_4\in E_t$$

に対し，(z_1,z_2,z_3,z_4) を z で表すと，明記性によって $f^m(x)=x$ を満たす $x=x(z)\in X$ が存在して

(29·6) $d(f^{a_i+j}(x),f^j(z_i))<\varepsilon \qquad (0\leqslant j\leqslant b_i-a_i,\ 1\leqslant i\leqslant 4)$

を満たすようにできる．

特に，$i=1$ のとき $a_1=-n$ であるから

$$d(f^{-n+j}(x),f^j(z_1))<\varepsilon \qquad (0\leqslant j\leqslant 2n)$$

である．ところで $n>N$ であるから $0\leqslant j\leqslant 2N$ なる j に対して

$$d(f^{-n+j}(x),\ f^{-n+j}\circ f^n(z_1))<\varepsilon.$$

だから

$$d(f^j(x),\ f^{j+n}(z_1))<\varepsilon \qquad (-N\leqslant j\leqslant N)$$

である．(29·4) により

$$d(x,f^n(z_1))<\delta$$

である．$z_1\in P_{2n}(f)\cap f^{-n}(\tilde{U})$ より，$f^n(z_1)\in\tilde{U}$，よって $d(f^n(z_1),A)<\delta$ である．だから

$$d(x,A)\leqslant d(x,f^n(z_1))+d(f^n(z_1),A)<2\delta.$$

ゆえに $x=x(z)\in U$ である．同様にして，$f^{s+2n+2M}(x)\in V$ が求まる．

(29·7) $r=s+2n+2M$

とおくと，$x\in P_m(f)\cap U\cap f^{-r}(V)$ を得る．

$z\neq z'$ のとき，$x(z)\neq x(z')$ に注意する．実際に，$x(z)=x(z')$ のとき，$z_1\neq z_1'$ ならば

$$\begin{aligned}d(f^j(z_1),f^j(z_1'))&\leqslant d(f^j(z_1),f^{a_1+j}(x(z')))\\&\quad+d(f^{a_1+j}(x(z')),f^j(z_1'))<2\varepsilon<c\end{aligned}$$

が $0\leqslant j\leqslant 2n$ なる j に対し成り立つ．ところで $z_1,z_1'\in p_{2n}(f)$ から，すべての $j\in\mathbf{Z}$ に対し $d(f^j(z_1),f^j(z_1'))<c$ である．f は拡大的であったから，$z_1=z_1'$ となって $z_1\neq z_1'$ に反する．$z_3\neq z_3'$ の場合も，$z_3,z_3'\in p_{2n}(f)$ であるから，同様な方法で矛盾を得る．$z_2\neq z_2'$ の場合は，$z_2,z_2'\in E_s$ で，E_s は $(s,2\varepsilon)$-分離集合

である．よって

(29·8)　$\max\{d(f^j(z_2), f^j(z_2')) : 0 \leqslant j \leqslant s-1\} > 2\varepsilon.$

しかし，(29·6) より $i=2$ のとき

$$d(f^{a_2+j}(x(z)), f^j(z_2)) < \varepsilon \qquad (0 \leqslant j \leqslant b_1 - a_2)$$
$$d(f^{a_2+j}(x(z')), f^j(z_2')) < \varepsilon$$

である．$b_2 - a_2 = s$ から

$$d(f^j(z_2), f^j(z_2')) \leqslant 2\varepsilon \quad (0 \leqslant j \leqslant s)$$

となって (29·8) に反する．$z_4 \neq z_4'$ も同様にして矛盾が示される．

ゆえに

$$x(\cdot) : (P_{2n}(f) \cap f^{-n}(\tilde{U})) \times E_s \times (P_{2n}(f) \cap f^{-n}(\tilde{V})) \times E_t \to P_m(f) \cap U \cap f^{-r}(V)$$

は単射であることがわかる．よって

$$\sharp(P_m(f) \cap U \cap f^{-r}(V)) \geqslant \sharp(P_{2n}(f) \cap f^{-n}(\tilde{U}))\sharp E_s \sharp(P_{2n}(f) \cap f^{-n}(\tilde{V}))\sharp E_t$$

である．よって補題 19·4, 19·5 により

$$\begin{aligned}\mu_m(U \cap f^{-r}(V)) &= \frac{1}{\sharp P_m(f)} \sharp(P_m(f) \cap U \cap f^{-r}(V)) \\ &\geqslant \frac{1}{\sharp P_m(f)} s_s(2\varepsilon, f) s_t(2\varepsilon, f) \sharp(P_{2n}(f) \cap f^{-n}(\tilde{U})) \\ &\quad \sharp(P_{2n}(f) \cap f^{-n}(\tilde{V})) \\ &\geqslant \frac{1}{\sharp P_m(f)} (\sharp P_{2n}(f))^2 s_s(2\varepsilon, f) s_t(2\varepsilon, f) \\ &\quad \mu_{2n}(\tilde{U}) \mu_{2n}(\tilde{V}) \\ &\geqslant \frac{2^{-hm}}{E} \left(\frac{D 2^{h2n}}{D_{2\varepsilon}}\right)^2 2^{hs} 2^{ht} \mu_{2n}(\tilde{U}) \mu_{2n}(\tilde{V})\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$R = \frac{2^{-4Mh}}{E} \left(\frac{D}{D_{2\varepsilon}}\right)^2 > 0$$

とおくと

$$\mu_m(U \cap f^{-r}(V)) \geqslant R \mu_{2n}(\tilde{U}) \mu_{2n}(\tilde{V})$$

が求まる．

自然数 t は実数 $\delta, \varepsilon, n, s$ と集合 U, V に依存しないし，実数 r, N, M, R にも依存しない．ここで n, s を固定して $t\to\infty$ とすれば (29・5) より $m\to\infty$ である．よって定理 23・3 (4) より

$$\mu(U\cap f^{-r}V)=\lim_{m\to\infty}\mu_m(U\cap f^{-r}V)\geqslant R\mu_{2n}(\tilde{U})\mu_{2n}(\tilde{V}).$$

δ を固定すると，$n>N$ は ε, s に依存しないし，M, R にも依存しない．s は任意であるから奇数に選ばれているとすれば $n\to\infty$ のとき，(29・7) より $r\to\infty$ である．よって再び定理 23・3 より

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\mu(U\cap f^{-r}(V))&\geqslant R\lim_{n\to\infty}\mu_{2n}(\tilde{U})\mu_{2n}(\tilde{V})\\&\geqslant R\mu(\tilde{U})\mu(\tilde{V})\\&\geqslant R\mu(A)\mu(B)\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに

$$\mu(A\cap f^{-r}(B))\geqslant\mu(U\cap f^{-r}(V))-\mu(U\setminus A)-\mu(V\setminus B)$$

により

$$\lim_{r\to\infty}\mu(A\cap f^{-r}(B))\geqslant R\mu(A)\mu(B)-\mu(U\setminus A)-\mu(V\setminus B)$$

である．ε, M, R は δ に無関係であるから，$\delta\to 0$ とすると

$$\mu(U\setminus A)\to 0,\quad \mu(V\setminus B)\to 0$$

が成り立つ．よって

$$\lim_{r\to\infty}\mu(A\cap f^{-r}(B))\geqslant R\mu(A)\mu(B)$$

である．R はコンパクト集合 A, B に依存しないことに注意する．

P, Q は X の Borel 集合で，$\mu(P)>0$，$\mu(Q)>0$ とすると，μ は正則であるから，コンパクト集合 $A\subset P$，$B\subset Q$ が $\mu(A)>0$，$\mu(B)>0$ を満たすように選べる．よって

$$\lim_{r\to\infty}\mu(P\cap f^{-r}(Q))>0$$

である．注意 22・2(3) によって f はエルゴード的である．

注意 29・3　定理 29・1 の f-不変 Borel 確率測度 μ は一意的に存在する．証明は困難であるので与えない．

注意 29・4　コンパクト距離空間 (X, d) の上の同相写像 $f: X\to X$ が拡大性

と位相混合性，さらに擬軌道追跡性をもてば，定理 16·3 によって，f は明記性をもつ．このとき定理 19·2，29·1 によって $h(f)=h_\mu(f)>0$ である．しかし，$h_\mu(f)=0$ となる $\mu\in\mathcal{M}_f(X)$ の集合は，コンパクト距離空間 $(\mathcal{M}_f(X),D)$ で Baire 集合をなすほど多く存在することが次の定理によってわかる．すなわち，f の位相的挙動（拡大性，位相混合性，擬軌道追跡性）を反映する f-不変 Borel 確率測度は $\mathcal{M}_f(X)$ にはそれほど多くないことを示している．

関数 $\xi: X\to\boldsymbol{R}$ が**上半連続**であるとは，X の任意の点 x に対し $x_n\to x(n\to\infty)$ であるとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し自然数 N が存在してすべての $n\geqslant N$ で

$$\xi(x)\geqslant\xi(x_n)-\varepsilon$$

を満たすときをいう．ξ が上半連続ならば，任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対して，集合 $\{x\in X: \xi(x)\geqslant a\}$ は X の閉集合である．

定理 29·4　コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が拡大性と明記性をもてば

$$\{\mu\in\mathcal{M}_f(X): h_\mu(f)=0\}$$

は $(\mathcal{M}_f(X),D)$ で Baire 集合である．

証明　定理 24·7 により，$E(f)$ は $\mathcal{M}_f(X)$ で稠密な集合である．さらに任意の $\mu\in E(f)$ に対し，$h_\mu(f)=0$ であることは $E(f)$ の定義から明らかである．f は拡大的であるから次の定理により写像 $\mu\mapsto h_\mu(f)$ は上半連続である．よって

$$\{\mu\in\mathcal{M}_f(X): h_\mu(f)<1/n\}$$

は開集合である．だから $\{\mu\in\mathcal{M}_f(X): h_\mu(f)=0\}$ は Baire 集合である．

定理 29·5　コンパクト距離空間 (X,d) の上の同相写像 f が拡大的であれば

$$h.(f): \mathcal{M}_f(X)\to\boldsymbol{R}$$

は上半連続である．

証明　f は拡大的であるから，定理 7·3 によって，f に対する生成系 $u=\{U_1,\cdots,U_s\}$ が存在する．u は X の有限開被覆である．このとき $\delta>0$ と有限開被覆 $u'=\{U_1',\cdots,U_s'\}$ が存在して，各 i に対し

$$\overline{U_\delta(U_i')}\subset U_i$$

とできる（ここに $U_\delta(E)=\{x\in X: d(x,E)<\delta\}$）．$\mu_n,\mu\in\mathscr{M}_f(X)$ は

$$\int\xi d\mu_n\to\int\xi d\mu\quad(\xi\in C(X))$$

を満たすとしよう．この μ に対し，$0<\delta_0<\delta$ なる δ_0 が存在して

$$\mu(\overline{U_{\delta_0}(U_i')})=\mu(U_{\delta_0}(U_i'))\quad(1\leqslant i\leqslant s)$$

とできる．$\overline{(U_{\delta_0}(U_i')}$ の境界を $\partial(\delta_0)$ で表す．仮にすべての δ_0 で $\mu(\partial(\delta_0))>0$ とすると，$\{\delta>0:\mu(\partial(\delta))>1/n\}$ が可算濃度より大きくなるような $n>0$ が存在する．これは μ が確率測度であることに反する)．

明らかに，$v=\{U_{\delta_0}(U_i'):1\leqslant i\leqslant s\}$ は X の開被覆である．いま

$$A_1=U_{\delta_0}(U_i'),\quad A_i=U_{\delta_0}(U_i')\setminus\bigcup_{k=1}^{i-1}A_k\quad(2\leqslant i\leqslant s)$$

を定義すると，各 A_i は $A_i\subset U_i$ を満たす Borel 集合で

$$\mu(\overline{A}_i)=\mu(A_i)$$

である．$\alpha=\{A_1,\cdots,A_s\}$ は X の分割である．任意の $k>0$ と $\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\alpha)$ の各元 A に対し

$$\mu(\overline{A})=\mu(A)$$

が成り立つから，定理 23·3 (4) によって

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$$

である．u は f の生成系であるから

$$\max\{\mathrm{diam}\,(A):A\in\bigvee_{i=-k}^{k}f^{-i}(\alpha)\}\to0\quad(k\to\infty)$$

である．ゆえに定理 27·6(8) によって，任意の $\nu\in\mathscr{M}_f(X)$ に対し

$$h_\nu(f)=\lim_{k\to\infty}h_\nu(f,\bigvee_{i=-k}^{k}f^{-i}(\alpha)).$$

さらに，定理 27·4 (4) により

$$h_\nu(f)=h_\nu(f,\alpha)$$

である．

さて $h_\nu(f)$ の上半連続を求めるために $\varepsilon>0$ を与える．このとき十分大きなすべての $k>0$ に対し

$$h_\mu(f)=h_\mu(f,\alpha)\geqslant\frac{1}{k}H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\alpha)\Big)-\varepsilon$$

とできる．$\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\alpha)$ は有限であるから $N>0$ が存在して，すべての $n\geqslant N$ に対し

$$\frac{1}{k}\left|H_{\mu_n}\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\alpha)\Big)-H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\alpha)\Big)\right|<\varepsilon$$

が成り立つことが確かめられる．ゆえに $n\geqslant N$ に対し

$$\begin{aligned}h_\mu(f)&\geqslant\frac{1}{k}H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\alpha)\Big)-\varepsilon\geqslant\frac{1}{k}H_{\mu_n}\Big(\bigvee_{i=0}^{k-1}f^{-i}(\alpha)\Big)-2\varepsilon\\&\geqslant h_{\mu_n}(f,\alpha)-2\varepsilon=h_{\mu_n}(f)-2\varepsilon\end{aligned}$$

である（3番目の不等式は定理17・1より求まる）．よって $h_\mu(f)$ は μ で上半連続である．

参 考 文 献

本書の執筆に当たって参考にした書物の主なものは次の通りである．

位相空間論，解析学に関連しては

〔1〕 中岡 稔：位相数学入門，朝倉書店 (1971)

〔2〕 Engelking. R: General topology, Warzawa (1977)

〔3〕 Simons. G: Topology and modern analysis, McGraw-Hill (1963)

〔4〕 Pontrjagin. L: 連続群論，岩波書店 (1957)

〔5〕 鶴見 茂：現代解析学序説，共立出版 (1968)

〔6〕 Taylor. A: Introduction to functional analysis., John Wily and Sons (1958)

力学係理論に関連しては

〔7〕 白岩謙一：力学系の理論，岩波書店 (1974)

〔8〕 森本明彦：擬軌道追跡性の方法と力学系の安定性，東京大学セミナリー・ノート 39 (1979)

〔9〕 Abraham. R, and Marsden. J.E, Foundations of mechanics, 2nd ed., The Benjamin/Cummings Publ. Co., (1978)

〔10〕 Smale. S, The mathematics of time, Essays on dynamical systems, Economic processes, and related topics, Springer-Verlag (1980)

〔11〕 Hirsch. M and Smale, S: 力学系入門，岩波書店 (1976)

〔12〕 Irwin. M: Smooth dynamical systems, Academic Press (1980)

〔13〕 Arnold. V: 常微分方程式，現代数学社 (1981)

〔14〕 Pontrjagin. L: 常微分方程式，共立出版 (1980)

〔15〕 斎藤利弥：位相力学，共立出版 (1971)

確率論，エルゴード理論に関連しては

〔16〕 十時東生：エルゴード理論入門，共立出版 (1971)

〔17〕 伊藤 清：確率論，岩波書店 (1952)

〔18〕 Walters. P: Ergodic theory, Springer-Verlag, 458 (1975)

〔19〕 Denker. M., Grillenberger. C and Sigmund. K: Ergodic theory on compact spaces. Springer-Verlag, 527 (1976)

〔20〕 Bowen. R: Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Springer-Verlag., 470 (1975)

〔21〕 原島 鮮：熱力学：統計力学，培風館（1978）

力学系理論，エルゴード理論についてさらに勉強したい人は次の〔22〕に掲載されている文献を参照されたい．

〔22〕 白岩謙一：Bibliography for dynamical systems.，名古屋大学，教養部数学教室（1985）

索　引

ア　行

カ　行

サ 行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

著者紹介

青木　統夫（あおき　のぶお）

1969年　東京都立大学大学院修士課程修了
現　在　東京都立大学助教授・理学博士
専　攻　エルゴード理論，力学系理論

白岩　謙一（しらいわ　けんいち）

1953年　名古屋大学卒業
現　在　名古屋大学教授・理学博士
専　攻　力学系理論
著　書
力学系の理論，岩波書店，1974年
常微分方程式論序説，サイエンス社，1975年
線形代数入門，サイエンス社，1976年
解析学入門，学術図書出版社，1981年

力学系とエントロピー

定価 3000 円

1985年4月20日　初版1刷発行
1987年4月20日　初版2刷発行

検印廃止
NDC 415

ISBN 4-320-01345-X

著者　青木　統夫
　　　白岩　謙一

発行　**共立出版株式会社**／南條正男

東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話東京947局2511番（代表）
郵便番号 112／振替口座東京1—57035

印刷　科学図書印刷
製本　関山製本

社団法人
自然科学書協会
会　員

Printed in Japan